

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Geometría y Topología



TOPOLOGÍA ALGEBRAICA Y DIFERENCIAL
Teorema de Poincaré-Hopf

Trabajo de fin de grado del Grado en Matemáticas

REALIZADO POR:

Franco Coltraro Ianniello

DIRIGIDO POR:

Jesús M. Ruiz

Resumen

En este trabajo estudiamos las relaciones existentes entre funciones —campos tangentes y funciones reales— definidas sobre variedades diferenciables y la topología de dichas variedades. Para ello usamos diversas técnicas de Topología Diferencial. Los resultados principales son el *Teorema del Índice de Poincaré-Hopf* y la *fórmula de Gauss-Bonnet* para hipersuperficies de dimensión par. Básicamente ambos resultados muestran que ciertas cantidades geométricas —el *índice total* de un campo tangente y la *curvatura íntegra*— son invariantes topológicos de las variedades donde están definidas. Para la obtención de estos teoremas nuestra principal herramienta será el *grado topológico* de Brouwer-Kronecker; con su ayuda podremos definir la noción clave de este artículo: el *índice* de un campo tangente en una singularidad aislada. En el trascurso de este escrito también desarrollamos los principios de la *Teoría de Morse*, los cuales nos permiten demostrar el *Teorema de Reeb*. Finalmente, también estudiamos bajo que condiciones se puede garantizar la existencia de campos tangentes a variedades nunca nulos.

Palabras Clave: topología diferencial, grado topológico, índice de campo tangente, teoría de Morse, campos tangentes nunca nulos, teorema de Poincaré-Hopf, fórmula de Gauss-Bonnet.

Abstract

In this work we study the relationships between functions —vector fields and real functions— defined on smooth manifolds and the topology of the manifolds themselves. We will mostly use tools from Differential Topology. Main results are the *Poincaré-Hopf Index Theorem* and the *Gauss-Bonnet formula* for hypersurfaces of even dimension. Basically both results show that certain geometrical quantities —the *total index* of a vector field and the *integral curvature*— are invariants of the manifolds where they are defined. In order to obtain these theorems our main tool will be the Brouwer-Kronecker *topological degree*; with it we will be able to define the key notion of this article: the *index* of a vector field at an isolated singularity. Along the way we will also give a short introduction to *Morse Theory*, which in turn allows us to prove the *Reeb Theorem*. Finally, we study under which hypothesis we can be certain that non-zero vector fields defined on manifolds exist.

Keywords: differential topology, topological degree, index of a vector field, Morse theory, non-zero vector fields, Poincaré-Hopf theorem, Gauss-Bonnet formula.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Introducción. | 1 |
| 1. Preliminares. | 4 |
| 1.1. Generalidades sobre Variedades. | 4 |
| 1.2. Valores Regulares. | 6 |
| 1.3. Entornos Tubulares. | 6 |
| 1.4. Difeotopías. | 9 |
| 1.5. Orientaciones. | 11 |
| 2. Grado de Brouwer-Kronecker. | 14 |
| 2.1. Definición y propiedades fundamentales. | 14 |
| 2.2. Aplicaciones. | 20 |
| 2.3. Número de vueltas. | 21 |
| 2.4. Teorema de Hopf. | 23 |
| 3. Singularidades de Campos Tangentes. | 28 |
| 3.1. Índice de una singularidad. | 28 |
| 3.2. Campos gradientes. | 33 |
| 3.3. Funciones de Morse. | 35 |
| 3.4. Teorema de Reeb. | 38 |
| 4. Teorema de Poincaré-Hopf. | 41 |
| 4.1. Teorema del Índice. | 41 |
| 4.2. Existencia de campos tangentes nunca nulos. | 44 |
| 4.3. Fórmula de Gauss-Bonnet. | 45 |

Introducción.

Uno de los problemas más antiguos que existen en matemáticas es el del desarrollo de herramientas que permitan decidir cuando dos objetos son diferentes o cuando son iguales. La idea es desarrollar *etiquetas* que capturen las características esenciales de los objetos en cuestión. Nuestros *objetos* en este trabajo serán superficies y con más generalidad variedades diferenciables. Por ejemplo, sabemos que una esfera y un toro (superficie de una rosquilla) son objetos matemáticos esencialmente distintos ya que el toro posee un *agujero* y la esfera no. La cuestión es cómo desarrollar herramientas que nos permitan hacer esas distinciones de forma precisa. A lo largo de este escrito desarrollamos técnicas de *Topología Diferencial* que nos permitirán responder a esa clase de cuestiones. En particular, estudiaremos con bastante detalle campos vectoriales tangentes y veremos como ellos nos revelan gran cantidad de información sobre las variedades donde estén definidos. Por ejemplo, demostraremos que todo campo tangente a la esfera debe tener al menos un cero, mientras que en el toro existen campos tangentes nunca nulos, luego el toro y la esfera no pueden ser *iguales*. Así pues, la clave reside en que las *etiquetas* que desarrollemos sean las mismas en el caso en el que los objetos sean *esencialmente* iguales y así, cuando éstas sean distintas, los objetos no podrán ser los mismos.

El objetivo de este trabajo es la obtención de resultados que pongan de manifiesto las relaciones profundas que existen entre la topología de una variedad diferenciable y ciertas funciones definidas sobre ellas. Demostraremos que ciertas cantidades definidas a partir de campos tangentes y funciones reales son de hecho invariantes topológicos, es decir, sólo dependen de la *la forma* de nuestra variedad. En otras palabras, demostraremos que dichas cantidades son *etiquetas* en el sentido mencionado en el párrafo anterior. Más en particular demostraremos el *Teorema de Poincaré-Hopf*. Este teorema afirma que dado un campo tangente a una variedad, cierta cantidad analítica definida a partir de él —su *índice total*— es igual a la *característica de Euler* de la variedad. Por tanto, el *índice total* no sólo es independiente del campo en sí, sino que además es un invariante topológico de la variedad. A partir de allí, seremos capaces de obtener la célebre *fórmula de Gauss-Bonnet*, la cual muestra que la *curvatura íntegra* de una variedad —una especie de curvatura ponderada— es también un invariante topológico y por tanto no cambia por deformaciones. Para la obtención de estos dos resultados será clave la noción de *grado topológico*: una generalización del *número de vueltas* usado en Análisis Complejo. A su vez, el grado topológico nos permitirá desarrollar una teoría satisfactoria para definir *el índice* de un campo tangente en una singularidad aislada.

Esta memoria se estructura de la siguiente forma: consta de cuatro capítulos, el primero de preliminares, los dos siguientes de desarrollos teóricos y el último de aplicaciones de la teoría previa. No obstante, a lo largo de este estudio se han intentado introducir numerosos ejemplos, figuras y discusiones informales que hagan más fácil la comprensión de las ideas fundamentales. Este trabajo asume un primer curso de Variedades Diferenciables por parte del lector. Asimismo, enfatizamos desde este momento que se asumirá que todas los objetos diferenciables de este escrito: variedades, campos tangentes, funciones, formas, etcétera, son de clase infinito. Para abreviar, la mayoría de las veces haremos

uso de la palabra *suave*¹ y cuando no se diga nada se sobreentenderá que el objeto en cuestión es eso, suave.

En el primer capítulo se desarrollan preliminares que serán muy importantes para todo el trabajo. En particular, se enuncia el *Teorema de Sard*, se incluyen discusiones completas sobre *difeotopías* y *entornos tubulares* y se detallan algunas construcciones relacionadas con la *orientabilidad*. En el segundo capítulo desarrollamos los fundamentos teóricos del *grado de Brouwer-Kronecker*. Destacamos las dos últimas secciones de ese capítulo donde demostramos un caso particular del *Teorema de Hopf* el cual nos permitirá obtener resultados interesantes en el cuarto capítulo.

En el tercer capítulo hacemos un estudio de *campos tangentes* y de *funciones reales* definidas sobre variedades. Definimos el *índice de una singularidad aislada* y damos algunos ejemplos de su cómputo. Las dos últimas secciones de ese capítulo son especiales en cuanto que contienen una pequeña introducción a la *Teoría de Morse*. En particular damos una *caracterización topológica de la esfera*: es la *única* variedad compacta en la que se puede definir una función suave con sólo dos puntos críticos. Para acabar, en el cuarto capítulo aplicamos toda la teoría desarrollada para demostrar los dos teoremas más importantes de este trabajo: el *Teorema de Poincaré-Hopf* y la *fórmula de Gauss-Bonnet*. Aquí además establecemos una de las *desigualdades de Morse*: demostramos que la característica de Euler de una variedad puede ser expresada en término de los puntos críticos de cualquier función de Morse definida sobre la variedad. También aplicamos un corolario obtenido en el capítulo dos para obtener una caracterización de las variedades que aceptan *campos tangentes nunca nulos*: son aquellas con característica de Euler igual a cero.

¹Calco claro del inglés *smooth*.

Capítulo 1

Preliminares.

En este primer capítulo se recuerdan y demuestran algunos resultados sobre variedades diferenciables que serán de utilidad más adelante. Gran parte de ellos han sido tratados en el grado de Matemáticas y por ello serán enunciados sin demostración o simplemente con bosquejos de demostración. Como referencias básicas recomendamos el libro de Gamboa-Ruiz [9] y el segundo capítulo del libro de Outerelo-Ruiz [5]. En la sección uno se recuerdan generalidades sobre variedades y se introducen definiciones importantes para más adelante. En la sección dos se definen los *valores regulares* y se enuncia el *Teorema de Sard*. En las siguientes dos secciones, la tres y la cuatro, se tratan los *entornos tubulares* y las *difeotopías*, respectivamente. Estas dos son las secciones con más detalles, ya que se incluyen demostraciones completas de todos los resultados enunciados. Finalmente el capítulo acaba con una sección dedicada a la *orientabilidad*.

1.1. Generalidades sobre Variedades.

Una **variedad diferenciable** m -dimensional es un espacio topológico Hausdorff con base numerable, localmente difeomorfo a \mathbb{R}^m ; es decir, el espacio afín \mathbb{R}^m es el modelo local de M . En la práctica esto significa que dispondremos de difeomorfismos $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \varphi(U) \subset M$ de abiertos de \mathbb{R}^m en abiertos de M llamados **parametrizaciones** y de sus inversas $\mathbf{x} = \varphi^{-1}$ llamadas **cartas**. En el presente trabajo se asumirá que todas las variedades son *suaves*, es decir, de clase infinito y que además todas están embebidas en algún espacio euclídeo. En la práctica esto no supone ninguna restricción ya que toda variedad puede ser embebida en un espacio afín de dimensión suficientemente grande. Seguiremos este enfoque debido a que el teorema principal de esta monografía será demostrado usando técnicas extrínsecas. Sin embargo, otros resultados se demostrarán intrínsecamente sin asumir ningún tipo de embebimiento.

Aunque la anterior definición de variedad diferenciable es suficiente para gran cantidad de situaciones, en algunas otras es necesario disponer de una definición más general. Por ejemplo: dadas dos variedades M y N se quiere definir la noción de homotopía suave entre dos funciones suaves $f, g : M \rightarrow N$. Para ello es necesario darle una estructura de variedad de diferenciable a $[0, 1] \times M$. Con esa finalidad se utiliza como modelo local el semiespacio afín:

$$\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^m : x_1 \geq 0\}.$$

Decimos que una función con valores reales definida de un abierto $W \subset \mathbb{H}^m$ es suave, si para cada punto del *borde* $\partial W = W \cap \{x_1 = 0\}$ existe una extensión suave definida en un entorno del punto en cuestión. Así pues, una **variedad diferenciable** m -dimensional **con borde** es un espacio topológico

Hausdorff con base numerable, localmente difeomorfo a \mathbb{H}^m . Si llamamos M a una de esas variedades, se define su **borde** como:

$$\partial M = \{p \in M : \text{existe una parametrización } \varphi \text{ tal que } p = \varphi(0, x_2, \dots, x_n)\}.$$

Se comprueba mediante argumentos elementales que la anterior definición es consistente ya que todo difeomorfismo $\Theta : W_1 \rightarrow W_2$ entre dos abiertos $W_1, W_2 \subset \mathbb{H}^m$ preserva los bordes $\partial W_i = W_i \cap \{x_1 = 0\}$. Resulta que ∂M es una variedad diferenciable sin borde de dimensión $\dim(M) - 1$.

Quizá la forma más fácil de construir variedades con borde sea la siguiente: dado un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ y una función suave $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, si las funciones $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ no se anulan todas a la vez para $x \in f^{-1}(0)$, entonces la desigualdad $f \leq 0$ define una variedad con borde dado por $f = 0$. Por ejemplo tomando $f(x) = \|x\|^2 - 1$ resulta que la esfera m -dimensional \mathbb{S}^m es el borde del disco cerrado unidad \mathbb{D}^{m+1} . De ahora en adelante, a las variedades sin borde se las llamará simplemente variedades y a las variedades con (posiblemente) borde se las denotará ∂ -variedades.

Es natural preguntarse si es posible clasificar todas las ∂ -variedades diferenciables que hay (salvo difeomorfismo). La respuesta es negativa en general² para variedades de cualquier dimensión; sin embargo en los casos particulares en los que las variedades tienen dimensión uno y dos esta clasificación sí es posible. Por ejemplo, en dimensión uno cualquier ∂ -variedad compacta es difeomorfa o bien a \mathbb{S}^1 o bien al intervalo compacto $[0, 1]$. Por otro lado, cabe destacar que la clasificación de las variedades compactas de dimensión tres forma parte de uno de los campos de investigación más activos en las matemáticas de nuestro tiempo.

Volviendo a nuestras consideraciones iniciales, resulta que $[0, 1] \times M$ es una ∂ -variedad con borde $(0 \times M) \cup (1 \times M)$. Ahora sí, se dirá que cualquier aplicación suave $H : [0, 1] \times M \rightarrow N$ es una **homotopía** suave entre las funciones $f = H_0$ y $g = H_1$. Como es usual en otras teorías que usan homotopías, si lo anterior se cumple, se dirá que f y g son homótopas y se escribirá $f \sim g$. Como es esperable, \sim es una relación de equivalencia entre funciones suaves de M a N , no obstante, la demostración de esto es un poco más delicada de lo usual en cuanto a la transitividad ya que el *encolamiento* de homotopías suaves requiere usar **funciones meseta**: dado un conjunto cerrado C de una variedad M y un abierto A que contenga a C siempre existe una función suave $\theta : M \rightarrow [0, 1]$ tal que $\theta \equiv 1$ en C y $\theta \equiv 0$ fuera de A . Tomando $M = \mathbb{R}$ es fácil obtener una función suave $\mu : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que cumple que $\mu \equiv 0$ en $t \leq \frac{1}{4}$ y $\mu \equiv 1$ en $t \geq \frac{3}{4}$. Usando esa función es fácil *pegar* dos homotopías F y G de forma diferenciable: si $F_1 = G_0$ podemos definir una homotopía suave entre F_0 y G_1 como sigue:

$$F_{\mu(2t)}(x) \text{ si } t \leq \frac{1}{2} \quad G_{\mu(2t-1)}(x) \text{ si } t \geq \frac{1}{2}.$$

Veamos ahora dos ejemplos donde se ilustran algunos de los conceptos anteriormente introducidos.

Ejemplo 1.1.1. Supongamos que ∂M y ∂N son los bordes de dos ∂ -variedades M y N . Supongamos que tenemos una función suave $f : \partial M \rightarrow \partial N$ que tiene una propiedad (P). Entonces se plantea si es posible extender f a una función suave $F : M \rightarrow N$ preservando (P). La respuesta es *no*, incluso en los casos más sencillos: un difeomorfismo $f : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$ no siempre se puede extender a un difeomorfismo $F : \mathbb{D}^{m+1} \rightarrow \mathbb{D}^{m+1}$. La razón subyace directamente en el hecho de que para $m = 7$ existen esferas exóticas: variedades suaves homeomorfas pero no difeomorfas a la esfera estándar m -dimensional. Más adelante, cuando estudiemos las funciones de Morse y el Teorema de Reeb quedará patente el porqué. Sin embargo, la extensión sí que es posible si sólo se pide que F sea un homeomorfismo: se define $F(0) = 0$ y para $x \in \mathbb{D}^{m+1}$ distinto de cero se define $F(x) = \|x\|f(\frac{x}{\|x\|})$.

²Puede demostrarse que para $\dim(M) \geq 4$ el problema es tan difícil como el *word problem* para grupos.

Ejemplo 1.1.2. Dadas las definiciones anteriores, es natural preguntarse si es posible clasificar módulo homotopía todas las funciones suaves entre dos variedades dadas. Aunque en general este es un problema difícil, en este trabajo se estudiará con cierto detalle el caso de funciones suaves $f, g : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$. Como ilustración supóngase que f, g son dos funciones suaves de una variedad M en \mathbb{S}^m **sin antípodas**, esto es, tales que $f(x) \neq -g(x)$ para todo $x \in M$. Entonces se define $H_t(x) = \frac{(1-t)f(x)+tg(x)}{\|(1-t)f(x)+tg(x)\|}$. Por no tener f, g antípodas H está bien definida. Además claramente es suave, luego es una homotopía y $f \sim g$. A partir de lo anterior es inmediato comprobar que si f no es suprayectiva entonces es nulhomótopa: si x_0 no está en la imagen de f entonces si definimos $g(x) = -x_0$ obtenemos que f y g no tienen antípodas y por ello son homótopas.

1.2. Valores Regulares.

Como es bien sabido, la esfera m -dimensional de radio uno $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ se define por:

$$\mathbb{S}^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : x_1^2 + \dots + x_{m+1}^2 = 1\}.$$

Ahora bien, introduciendo la función suave $f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x_1, \dots, x_{m+1}) = x_1^2 + \dots + x_{m+1}^2,$$

se tiene que $\mathbb{S}^m = f^{-1}(1)$. Más en general dado $r \neq 0$, $f^{-1}(r^2)$ es una esfera m -dimensional de radio r . El único punto donde la anterior construcción falla es en el 0. Esto se debe a que si $x \in f^{-1}(0) = \{0\}$ entonces se tiene que $d_x f \equiv 0$ no es suprayectiva. Así pues, la siguiente definición es natural.

Dada una función suave $f : M \rightarrow N$ entre dos ∂ -variedades, se dirá que $x \in M$ es un **punto crítico** de f si la aplicación lineal derivada $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ entre los espacios tangentes de M y N no es suprayectiva. Es fácil ver que el conjunto C_f de todos los puntos críticos de f es un conjunto cerrado de M . Finalmente dado $y \in N$ se dirá que y es un **valor regular** de f si éste *no* es la imagen de un punto crítico. El conjunto de todos los valores regulares de f se denotará R_f y por definición es igual a $N \setminus f(C_f)$. Nótese que cuando f es cerrada entonces se cumple que R_f es abierto.

La principal utilidad que tendrán los valores regulares viene dada por la siguiente proposición: dada una ∂ -variedad M , una variedad N y una función suave $f : M \rightarrow N$; si $y \in \text{Im}(f)$ es un valor regular de f entonces usando el *Teorema de la Función Implícita* se demuestra que $f^{-1}(y)$ es una ∂ -variedad suave de dimensión $\dim(M) - \dim(N)$ con borde $\partial M \cap f^{-1}(y)$ y que $T_x f^{-1}(y) = \ker(d_x f)$ para todo $x \in f^{-1}(y)$.

Naturalmente para que los valores regulares sean útiles es necesario que haya *suficientes*, pero el **Teorema de Sard-Brown** garantiza eso: dada una función suave entre dos ∂ -variedades: $f : M \rightarrow N$, los valores regulares de f forman un conjunto denso en N . De hecho, el teorema anterior dice que la imagen de los puntos críticos $f(C_f)$ tiene medida nula en N (un conjunto $E \subset N$ tiene medida nula si para toda carta $\mathbf{x} : U \subset N \rightarrow \mathbb{R}^n$ se cumple que $\mathbf{x}(U \cap E) \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida nula).

1.3. Entornos Tubulares.

Es intuitivamente claro que dada una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, la *forma* de S estará intrínsecamente relacionada con cómo varía un vector perpendicular a S en cada punto. La aplicación (continua) que a cada punto de S le asigna su vector perpendicular se llama aplicación de Gauss. No obstante, generalizar esta noción para una variedad m -dimensional $M \subset \mathbb{R}^p$ cuando $m < p - 1$ no es posible

ya que hay más de dos vectores perpendiculares a M en \mathbb{R}^p (piénsese en un círculo embebido en el espacio).

La forma de remediar este inconveniente será a través de entornos tubulares. Como comienzo, introducimos **el fibrado normal** de una variedad $M \subset \mathbb{R}^p$ como

$$\nu M = \{(x, v) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p : x \in M, v \perp T_x M\}.$$

Se cumple que νM es una variedad suave de dimensión p . Esto se debe a que si $\pi : \nu M \rightarrow M$ es la proyección a $M : (x, v) \mapsto x$, entonces cada $x \in M$ posee un entorno U tal que $\pi^{-1}(U)$ es difeomorfo a $U \times \mathbb{R}^{p-m}$. En otras palabras, localmente los abiertos de el fibrado normal son difeomorfos a $U \times B$ donde $U \subset M$, $B \subset \mathbb{R}^{p-m}$ son abiertos (véase la figura 1.1).

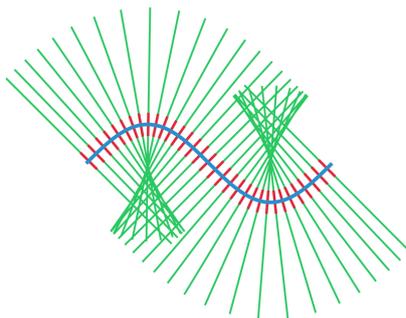


Figura 1.1: M es una curva en \mathbb{R}^2 . En verde se dibuja νM y en rojo νM_ϵ .

Sea ahora $\vartheta : \nu M \rightarrow \mathbb{R}^p$ la función suave definida por $\vartheta(x, v) = x + v$ y para $\epsilon > 0$ pongamos $\nu M_\epsilon = \{(x, v) \in \nu M : \|v\| < \epsilon\}$. Entonces es geoméricamente natural que puntos y suficientemente cercanos a M se puedan escribir de forma única como $y = x + v$ donde $x \in M$ y $v \in T_x M^\perp$. Formalmente, cf. [6], se cumple lo siguiente:

Teorema 1.3.1 (del Entorno Tubular). *Dada una variedad compacta $M \subset \mathbb{R}^p$ existe un $\epsilon > 0$ tal que ϑ es un difeomorfismo entre νM_ϵ y el abierto $U = \{y \in \mathbb{R}^p : \text{dist}(y, M) < \epsilon\}$.*

Demostración. La prueba constará de cuatro pasos:

(a) ϑ es un difeomorfismo local cerca de cada punto $(x, 0) \in \nu M$:

En efecto, es suficiente ver que $d_{(x,0)}\vartheta$ es un isomorfismo lineal y aplicar el *Teorema de Inversión Local*. Para ello es suficiente mostrar que esa derivada es suprayectiva ya que $\dim(\nu M) = p$. Pero ϑ induce por restricción las siguientes identificaciones:

$$\vartheta|_{M \times 0} : M \times 0 \cong M \text{ y } \vartheta|_{x \times T_x M^\perp} : x \times T_x M^\perp \cong T_x M^\perp,$$

luego la imagen de $d_{(x,0)}\vartheta$ contiene a $T_x M + T_x M^\perp = \mathbb{R}^p$ y por ello esa diferencial es suprayectiva como queríamos.

(b) ϑ es globalmente inyectiva en νM_δ para cierto $\delta > 0$:

En efecto, si suponemos por reducción al absurdo que esto no es así, entonces existirían sucesiones $(x_i, v_i) \neq (y_i, w_i)$ en νM tales que $\|v_i\|, \|w_i\| \rightarrow 0$ y además $\vartheta(x_i, v_i) = \vartheta(y_i, w_i)$. Pero por ser M compacta existirían subsucesiones tales que $x_j \rightarrow x$ y $y_j \rightarrow y$ para $x, y \in M$, entonces esto implicaría que

$$0 = \vartheta(x_j, v_j) - \vartheta(y_j, w_j) \rightarrow \vartheta(x, 0) - \vartheta(y, 0) = x - y,$$

luego $x = y$. Finalmente para j suficientemente grande tanto (x_j, v_j) como (y_j, w_j) están arbitrariamente cerca de $(x, 0)$ con lo que ϑ no sería inyectiva en ningún entorno de $(x, 0)$.

(c) ϑ es un difeomorfismo en νM_ϵ para $0 < \epsilon \leq \delta$:

Sabemos por (a) que ϑ es difeomorfismo en un entorno de $(x, 0)$ digamos A_x . Nótese que A_x puede ser tomado de la forma $V_x \times B_{\epsilon(x)}$ donde $V_x \subset M$ es un entorno de x y además $B_{\epsilon(x)} = \{v \in T_x M^\perp : \|v\| < \epsilon(x)\}$. Si ahora recubrimos M con los V_x y usamos la compacidad obtenemos que un numero finito de abiertos V_1, \dots, V_k recubren M y que ϑ es un difeomorfismo en $V_i \times B_{\epsilon_i}$. Luego tomando $\epsilon = \min_i \{\delta, \epsilon_i\}$ queda que ϑ es un difeomorfismo en νM_ϵ .

(d) $\vartheta(\nu M_\epsilon) = U$:

La inclusión \subseteq es clara. Para el otro sentido, dado un $y \in U$, sea $x \in M$ tal que $\text{dist}(M, y) = \text{dist}(x, y) < \epsilon$. Este x siempre existe por ser M compacta y $\text{dist}(\cdot, y)$ continua. Ahora bien, el vector $v = y - x$ tiene norma $< \epsilon$ y además $v \perp T_x M$ por ser x minimal. En efecto, x es el mínimo de la función suave $z \mapsto \sigma(z) = \|y - z\|^2$, $z \in M$, luego para $u \in T_x M$ se tiene que $0 = d_x \sigma(u) = -2\langle y - x, u \rangle$. Así $(x, v) \in \nu M_\epsilon$ y $\vartheta(x, v) = y$.

■

Observación 1.3.2 El teorema sigue siendo cierto también cuando M no es compacta, pero en ese caso el ϵ del enunciado es una función continua.

(1.3.3) Campo normal en un tubo alrededor de M . Como consecuencia del teorema podemos definir la siguiente retracción suave $\rho : U \rightarrow M$ como sigue

$$U \ni y = \vartheta(x, v) = x + v \mapsto x.$$

Es decir, $\rho = \pi \circ \vartheta^{-1}$. Por construcción ρ tiene las siguientes propiedades:

- (1) $\rho(x) = x$ si y sólo si $x \in M$.
- (2) $y - \rho(y) \perp T_{\rho(y)} M$ para todo $y \in U$.
- (3) $\text{dist}(y, M) = \|y - \rho(y)\|$ para todo $y \in U$.

Ahora describiremos cómo, usando la retracción obtenida más arriba y sus propiedades, es posible definir un campo normal *tubular* a M . Este campo será el análogo a la aplicación de Gauss mencionada al principio. La idea es demostrar que para un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño \bar{U} es una ∂ -variedad suave de dimensión p cuyo borde por tanto es una hipersuperficie y luego definir un campo normal en ese borde.

Para empezar, motivados por (3) definimos la función suave:

$$\tau : U \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \|y - \rho(y)\|^2.$$

Ahora bien, gracias a que $d_y \rho(\mathbb{R}^p) \subseteq T_{\rho(y)} M$ y a (2), se cumple que:

$$\text{grad}_y(\tau) = 2(y - \rho(y)),$$

ya que para $v \in T_y U \cong \mathbb{R}^p$ se tiene que:

$$d_y \tau(v) = 2\langle v - d_y \rho(v), y - \rho(y) \rangle = 2\langle v, y - \rho(y) \rangle.$$

Así pues, el gradiente es nulo si y sólo si $y = \rho(y)$ y por **(1)** $y \in M$. Pero para esos puntos se tiene que $\tau(y) = 0$, luego cualquier $\epsilon > 0$ es un valor regular de τ y por ello $N := \{y \in U : \tau(y) \leq \epsilon\}$ es una ∂ -variedad suave con borde $\partial N = \{y \in U : \tau(y) = \epsilon\}$. Además, $\text{grad}_y(\tau)$ es un campo perpendicular en todo punto a la hipersuperficie $\partial N \subset \mathbb{R}^p$. Luego podemos definir:

$$\eta(y) = \frac{\text{grad}_y(\tau)}{\|\text{grad}_y(\tau)\|} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}(y - \rho(y)) \text{ para } y \in \partial N.$$

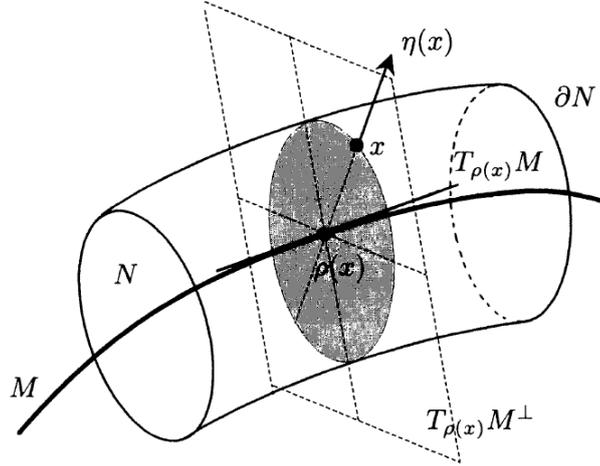


Figura 1.2: M es una curva en \mathbb{R}^3 .

Es claro que η así definido es un campo suave de vectores unitarios y normales a ∂N . Además η también es perpendicular a M en el sentido de que $T_{\rho(y)}M \subset T_y\partial N$. Finalmente usando **(3)** y que $\text{dist}(M, \mathbb{R}^p \setminus U) > 0$, puede elegirse un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño para que se tenga que N sea una ∂ -variedad compacta y además:

$$N = \{x \in \mathbb{R}^p : \text{dist}(x, M) \leq \sqrt{\epsilon}\}, \quad \partial N = \{x \in \mathbb{R}^p : \text{dist}(x, M) = \sqrt{\epsilon}\}.$$

Todo lo anterior se resume diciendo que $\eta : \partial N \rightarrow \mathbb{S}^{p-1}$ es un **campo normal en un tubo** alrededor de M .

1.4. Difeotopías.

En numerosas ocasiones se encuentran situaciones similares a la siguiente: supóngase que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave con una cantidad finita de ceros $\{x_1, \dots, x_k\}$ definida en una variedad suave sin borde. Evidentemente los ceros de f pueden estar distribuidos arbitrariamente por toda M , pero sería mejor que todos estuvieran en un entorno coordinado U de M difeomorfo a \mathbb{R}^m . Una manera de conseguir esto sería usando un difeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tal que $h(u_i) = x_i$ para $u_i \in U$ distintos y luego reemplazando f por $f \circ h$. Sin embargo puede que haciendo esto f se viera fuertemente modificada. Una buena opción sería que h fuera homótopa a la identidad con lo que $f \circ h$ sería homótopa a f . Así se puede motivar la siguiente definición:

Una homotopía (suave) $H : [0, 1] \times M \rightarrow M$ se dirá que es una **difeotopía** de M si $H_0 = \text{Id}_M$ y todas las funciones $H_t : M \rightarrow M$ son difeomorfismos; diremos que H es la identidad fuera de un

compacto K si $H_t(x) = x$ para $x \notin K$. Dada una difeotopía H se dirá que dos puntos $x, y \in M$ son **difeótopos** si existe una difeotopía H que es la identidad fuera de un compacto y cumple que $H_1(x) = y$. Nótese que si x e y son difeótopos el camino $H_t(x)$ los une. Nuevamente, usando la función meseta μ de 1.1 no es difícil ver que ser difeótopo es una relación de equivalencia entre puntos de M . Por tanto, las clases $[x] = \{y \in M : y \text{ es difeótopo a } x\}$ particionan M en clases de difeotopía disjuntas. Ahora bien, supongamos que M es una variedad conexa y sea $x_0 \in M$, si conseguimos demostrar que todo punto x suficientemente cercano a x_0 es difeótopo a él, cf. [10], entonces se tendrá que las clases de difeotopía son abiertas y por ello también cerradas (ya que el complemento de $[x]$ es la unión de las restantes clases); luego por ser M conexa, se deducirá que sólo hay una de esas clases y que por eso cualesquiera dos puntos son difeótopos.

Sea $x_0 \in M$ y sea $U \subset M$ un entorno abierto de x_0 difeomorfo a \mathbb{R}^m . Para obtener el resultado mencionado en el párrafo anterior es claramente suficiente obtener lo siguiente:

Todo punto $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $\|y\| < 1$ es difeótopo al origen de coordenadas por una difeotopía H que cumple $H_t(x) = x$ para $\|x\| \geq 1$.

Fijemos $y \in B_r(0)$ donde $r < 1$ y definamos $c = \frac{y}{\|y\|}$. Además, sea $\lambda : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una función meseta tal que $\lambda \equiv 1$ en $\overline{B_r(0)}$ y $\lambda \equiv 0$ para $\|x\| \geq 1$. Planteemos ahora la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{du_i}{dt} = c_i \lambda(u_1, \dots, u_m) \text{ para } i = 1, \dots, m \text{ con condición inicial } u(0) = x \in \mathbb{R}^m.$$

Gracias a que λ es una función suave con soporte compacto en \mathbb{R}^m podemos usar el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales y obtener una única solución $u(t, x)$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Esta solución cumple que $u(0) = x$ y por ser λ suave, u depende suavemente de x . Así pues es natural definir la función suave $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ como $H_t(x) = u(t, x)$. Veamos que H es la difeotopía requerida: antes que nada $H_0(x) = u(0) = x$. Segundo, por unicidad se tiene $H_t(x) = x + tc$ siempre que $\|x + tc\| \leq r$ y asimismo que $H_t(x) = x$ si $\|x\| \geq 1$ luego se cumple que $H_{\|y\|}(0) = y$ ya que $\|y\| < r$. Y tercero y último, cada H_t es un difeomorfismo debido a que $H_{s+t} = H_s \circ H_t$ nuevamente por unicidad.

Para terminar esta sección demostramos el siguiente teorema de carácter más general que la discusión anterior:

Teorema 1.4.1 (Lema de Difeotopía). *Sea M una variedad suave de dimensión mayor o igual que dos. Sean $\{a_1, \dots, a_p\}$ y $\{b_1, \dots, b_p\}$ dos colecciones de puntos de M y sea A un abierto conexo que contenga a ambas. Entonces las dos colecciones son difeótopas por una difeotopía que es la identidad fuera de un compacto $K \subset A$.*

Demostración. Por inducción en el número k de puntos, $k = 1$ fue demostrado anteriormente; suponemos el resultado para $k = p - 1$. Entonces existe una difeotopía F de la variedad $M \setminus \{a_p, b_p\}$ tal que $F_1(a_i) = b_i$ para $i \leq p - 1$ y que es la identidad fuera de un compacto L contenido en el conexo $A \setminus \{a_p, b_p\}$. Luego podemos extender F a una difeotopía de M como la identidad. Análogamente existe una difeotopía G tal que $G_1(a_p) = b_p$ y que es la identidad fuera de un compacto K contenido en el conexo $A \setminus \{a_1, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_{p-1}\}$. G también puede ser extendida como la identidad a una difeotopía de M . Finalmente definimos la difeotopía $H_t := F_t \circ G_t$. ■

Corolario 1.4.2. *Cualquier colección finita de puntos de una variedad conexa de dimensión ≥ 2 está contenida en un abierto difeomorfo a \mathbb{R}^m .*

1.5. Orientaciones.

En esta sección final resumiremos unas cuantas construcciones importantes relacionadas con la orientabilidad. En primer lugar una orientación ζ en un espacio vectorial V de dimensión finita $m \geq 1$ es simplemente la elección de una base $B = \{u_1, \dots, u_m\}$, siendo dos elecciones equivalentes si el determinante de la matriz de cambio de base es positivo, escribimos $\zeta = [u_1, \dots, u_m]$ y decimos que la base B es positiva. Claramente sólo hay dos orientaciones posibles que serán denotadas por ζ y $-\zeta$ y serán llamadas *opuestas*.

Dicho lo anterior, recuérdese que una ∂ -variedad M es **orientable** si existe un atlas Λ de M de tal forma que dadas dos parametrizaciones cualesquiera de Λ , $\varphi : U \subset \mathbb{H}^m \rightarrow \varphi(U) \subset M$ y $\phi : V \subset \mathbb{H}^m \rightarrow \phi(V) \subset M$ tales que $\varphi(U) \cap \phi(V) \neq \emptyset$ el determinante del jacobiano del cambio de base es positivo: $\det J_x(\phi^{-1}\varphi) > 0$ en todo punto x donde esté definido. Tal atlas Λ se llama un atlas *positivo* de M .

Esto significa que dado $x \in M$ todas las bases $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_x\}_i$ inducidas por parametrizaciones de Λ alrededor de x definen la misma orientación $\zeta_x = [\frac{\partial}{\partial x_i}]$ en $T_x M$ como espacio vectorial. Así pues, dada una ∂ -variedad orientable M una orientación de M es una familia $\zeta_M = \{\zeta_x : x \in M\}$ donde cada ζ_x es una orientación de $T_x M$ inducida por cualquier parametrización de Λ . Si M es orientable y conexa entonces posee dos orientaciones que denotamos ζ_M y $-\zeta_M$. De ahora en adelante si M es orientable y se ha elegido un atlas positivo se dirá que una parametrización (y su correspondiente carta) de Λ es *positiva* y que la base $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_x\}_i$ inducida por ella es una *base positiva*.

Para hipersuperficies $M \subset \mathbb{R}^p$ existe una caracterización quizá más intuitiva de orientabilidad: *M es orientable si y sólo si existe un campo suave de vectores unitarios normales a M* . Esto es debido al sencillo hecho siguiente: la orientación de un hiperplano vectorial de \mathbb{R}^p está completamente determinada por la elección de un vector perpendicular al mismo. Cabe añadir, que como consecuencia del *Teorema de Jordan-Brouwer* (ver [5] y [14]) se puede demostrar que cualquier hipersuperficie es orientable, luego en ese caso siempre dispondremos de campos normales unitarios.

Sea ahora una función suave $f : M \rightarrow N$ entre dos ∂ -variedades orientadas de la misma dimensión. Sea $x \in M$ un punto regular de f , es decir, un punto que no sea crítico, lo que en este caso significa que $d_x f$ es un isomorfismo lineal. Entonces se dirá que f **preserva** la orientación en x si $d_x f$ manda una base positiva de $T_x M$ a una base positiva de $T_{f(x)} N$. Esto significa que dada una parametrización positiva φ de M alrededor de x y una parametrización positiva ϕ de N alrededor de $f(x)$ se tiene $\det J_x(\phi^{-1}f\varphi) > 0$. En caso contrario se dirá que f **invierte** la orientación en x . Si f preserva (respectivamente invierte) la orientación en $x \in M$ se escribirá $\text{signo}_x(f) = +1$ (respectivamente -1).

Nótese que por la continuidad del determinante jacobiano si f preserva la orientación en x entonces la preserva en un entorno de x . En particular si f es un difeomorfismo entre variedades conexas que conserva la orientación en un punto entonces la conserva en todos ellos. Como aplicación de lo anterior, se tiene lo siguiente:

Si H es una difeotopía de una variedad orientada M entonces se tiene que todos los difeomorfismos H_t preservan la orientación.

En efecto, la función $t \mapsto \det(d_x H_t) \neq 0$ para $x \in M$ fijo es continua y además $\det(d_x H_0) = \det(\text{Id}_{T_x M}) > 0$ luego aplicando el comentario anterior se obtiene el resultado.

Ejemplo 1.5.1. En \mathbb{R}^m hay una orientación estándar ζ^m dada por la base estándar $B_c = \{e_1, \dots, e_m\}$. Cualquier otra base $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ de \mathbb{R}^m define la orientación estándar si $\det(v_1, \dots, v_m) > 0$.

Ejemplo 1.5.2. El producto de dos ∂ -variedades orientadas $M \times N$ se orienta como sigue: dado $(x, y) \in M \times N$ se define en $T_{(x,y)}(M \times N) = T_x M \times T_y N$ la orientación:

$$\zeta_{(x,y)} = [(u_1, 0), \dots, (u_m, 0), (0, v_1), \dots, (0, v_n)],$$

donde $\zeta_x = [u_1, \dots, u_m]$ es una orientación de $T_x M$ y $\zeta_y = [v_1, \dots, v_n]$ es una orientación de $T_y N$. Se comprueba que esta definición es consistente.

Ejemplo 1.5.3. Dada una variedad $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ definida por la ecuación $\{f = 0\}$, el gradiente $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ definido por $\nu = \text{grad}(f)$ es normal a la variedad en todo punto. Luego M es orientable y se orienta de la siguiente forma: una base $\{v_1, \dots, v_m\}$ de $T_x M$ es positiva si $[\nu(x), v_1, \dots, v_m]$ es la orientación estándar ζ^{m+1} de \mathbb{R}^{m+1} . Tomemos ahora $M = \mathbb{S}^m$ y orientémosla con el procedimiento descrito anteriormente. Ahora bien, dados dos puntos antipodales a y $-a$ de la esfera, los dos hiperplanos tangentes $T_a \mathbb{S}^m$ y $T_{-a} \mathbb{S}^m$ coinciden. Así pues, se pueden comparar las orientaciones ζ_a y ζ_{-a} :

$$\zeta_a = [u_1, \dots, u_m] \text{ si } \zeta^{m+1} = [a, u_1, \dots, u_m]$$

y análogamente

$$\zeta_{-a} = [v_1, \dots, v_m] \text{ si } \zeta^{m+1} = [-a, v_1, \dots, v_m].$$

Luego se puede tomar $v_1 = -u_1, v_2 = u_2, \dots, v_m = u_m$ y concluir que $\zeta_{-a} = -\zeta_a$. En otras palabras: *la esfera posee orientaciones opuestas en puntos antipodales.*

Ejemplo 1.5.4. Por último veamos cómo se comporta la aplicación antipodal $f : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m : x \mapsto -x$. Por ser un difeomorfismo, f preservará o invertirá la orientación en todos los puntos simultáneamente, luego es suficiente calcular el *signo* de f sólo en un punto, digamos el polo norte $a = (0, \dots, 0, 1)$. Entonces $f(a) = -a = (0, \dots, 0, -1)$ es el polo sur y $d_x f : T_a \mathbb{S}^m \rightarrow T_{-a} \mathbb{S}^m$ es la aplicación lineal $u \mapsto -u$ que manda cualquier base $\{u_1, \dots, u_m\}$ a otra $\{-u_1, \dots, -u_m\}$. Ahora bien, la matriz de cambio de base de la segunda a la primera tiene determinante $(-1)^m$ y teniendo en cuenta que $T_a \mathbb{S}^m = T_{-a} \mathbb{S}^m = \{x_{m+1} = 0\}$ pero con orientaciones opuestas, se tiene que $\text{signo}_x(f) = -1$ si m es par, y que $\text{signo}_x(f) = +1$ si m es impar, para todo $x \in \mathbb{S}^m$.

Orientación de imágenes inversas.

Supongamos la situación de **1.2**: dada una función suave $f : M \rightarrow N$ entre una ∂ -variedad M y una variedad N , se tiene que $f^{-1}(y)$ es una ∂ -variedad suave para un valor regular $y \in N$. Entonces se plantea: ¿es posible orientar $f^{-1}(y)$ usando orientaciones de M y N ? La respuesta es sí y el método se inspira en el que se usó para orientar la esfera.

Si $x \in f^{-1}(y)$, el espacio tangente $L = T_x f^{-1}(y)$ es el núcleo de $d_x f$, y por ser la diferencial suprayectiva, $d_x f$ restringida a un subespacio vectorial $E \subset T_x M$ suplementario de L es un isomorfismo lineal $d_x f|_E : E \rightarrow T_y N$. Ahora sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de E que $d_x f$ mande a una base positiva de $T_y N$. Se define una orientación ζ_x en L de la siguiente forma: una base $\{u_1, \dots, u_{m-n}\}$ de L es positiva si $\{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_{m-n}\}$ es una base positiva de $T_x M$. Es posible comprobar (véase [5]) que ζ_x está bien definida y que $f^{-1}(y)$ es una ∂ -variedad orientada por $\{\zeta_x\}_x$.

Orientación en los bordes.

Dada una ∂ -variedad orientable M también ∂M es una variedad orientable. Es interesante estudiar cómo orientar ∂M usando una orientación de M . Fijada una orientación de M , consideremos: un punto

$a \in \partial M$, una carta $\mathbf{x} : U_a \subset M \rightarrow \mathbb{H}^m$ tal que $\mathbf{x}(a) = 0$, un vector tangente $v \in T_a M \setminus T_a \partial M$ y $\gamma : I \rightarrow M$ una curva C^1 tal que $\gamma(0) = a$ y $\gamma'(0) = v$. Entonces $\mathbf{x} \circ \gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ son coordenadas tales que $v = \sum_i x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x$ donde $x'_1(0) \neq 0$ pues $d_a \mathbf{x}$ es un isomorfismo lineal que manda el par $T_a \partial M \subset T_a M$ al par $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$. Se dirá que el vector v es **entrante** si $x'_1(0) > 0$ y que es **saliente** si $x'_1(0) < 0$. Como es usual, la definición anterior no depende de la carta \mathbf{x} usada. Además si $I = [0, \epsilon)$ entonces v será entrante y si $I = (-\epsilon, 0]$ entonces v será saliente. Finalmente se define una orientación $\partial \zeta$ en ∂M como sigue:

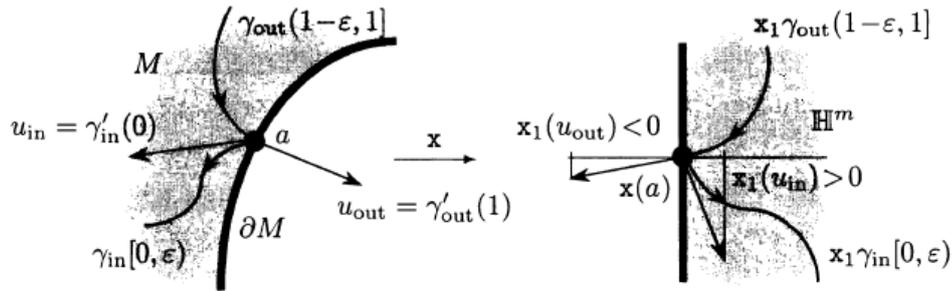


Figura 1.3: Se dibujan vectores salientes (*out*) y los entrantes (*in*).

Una base de $T_a \partial M$: $\{u_1, \dots, u_{m-1}\}$ es una base positiva de $\partial \zeta_a$ si para un vector saliente $v \in T_a M$ se tiene que $\{v, u_1, \dots, u_{m-1}\}$ es una base positiva de ζ_a . Como es habitual se comprueba que esta definición no depende de las elecciones hechas, de modo que $\partial \zeta$ está bien definida.

Capítulo 2

Grado de Brouwer-Kronecker.

En este segundo capítulo se define el *grado topológico*; ésta será nuestra principal herramienta en el siguiente capítulo cuando definamos el índice de una singularidad aislada. Como referencias para este capítulo recomendamos el libro de Outerelo-Ruiz [5] y el de Guillemin-Pollack [14]. En la sección uno se define el *grado de Brouwer-Kronecker* y se demuestran sus propiedades más importantes. En la sección dos se dan algunas aplicaciones, incluido inevitablemente el *Teorema del punto fijo de Brouwer* cf. [4]. En la siguiente sección se trata el *número de vueltas*. Por último, en la sección cuarta se usan varias de las ideas desarrolladas anteriormente para demostrar un *caso particular del Teorema de Hopf* que será de utilidad en el cuarto capítulo.

2.1. Definición y propiedades fundamentales.

Sea $f : M \rightarrow N$ una función suave entre dos variedades orientadas de la misma dimensión. Dado un valor regular $y \in N$ sabemos que para cada $x \in f^{-1}(y)$ la aplicación lineal $d_x f$ es un isomorfismo lineal, luego la suma:

$$d(f, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{signo}_x(f)$$

tiene sentido siempre que $f^{-1}(y)$ sea un conjunto finito. Además, le podemos dar la siguiente interpretación geométrica: si pensamos en f como una función que *enrolla* la variedad M sobre la variedad N , la suma anterior contabiliza el número de veces que M *pasa* sobre y teniendo en cuenta el *sentido* en el que lo hace.

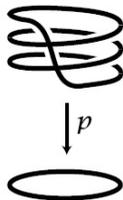


Figura 2.1: \mathbb{S}^1 enrollándose sobre sí misma d veces a través de $p(z) = z^d$.

Quizá la mejor manera de imaginarse esto último sea pensando en funciones de $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ en sí misma, del tipo $z \mapsto p(z) = z^d$ para $d \in \mathbb{Z}$ no nulo. De hecho se tiene que $d(p, z_0) = d$ para cualquier $z_0 \in \mathbb{S}^1$.

En efecto, cualquier $\|z_0\| = 1$ tiene $|d|$ preimágenes, además la parametrización $\varphi(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ define una orientación en la circunferencia. Entonces

$$\theta \xrightarrow{\varphi} (\cos \theta, \sin \theta) \xrightarrow{p} (\cos(d \cdot \theta), \sin(d \cdot \theta)) \xrightarrow{\varphi^{-1}} d \cdot \theta.$$

Por tanto, $\text{signo}_{z_0}(p) = +1$ si $d > 0$ y $\text{signo}_{z_0}(p) = -1$ si $d < 0$.

El objetivo de esta sección es demostrar que imponiendo restricciones adicionales sobre M y N podemos conseguir $d(f, y)$ sea una función independiente de $y \in N$ y dependiente sólo del tipo de homotopía de f . En general esto se consigue exigiendo que N sea conexa y f propia³. Aquí, nosotros supondremos que M es una variedad compacta. En particular cualquier $f : M \rightarrow N$ continua es propia cuando M es compacta.

Proposición 2.1.1 (Invarianza local). *Sea $f : M \rightarrow N$ una función suave entre dos variedades orientadas de la misma dimensión, con M compacta. Entonces cada valor regular $y_0 \in R_f$ de f posee un entorno $V_{y_0} \subset R_f$ tal que para cada $y \in V_{y_0}$ se tiene que $f^{-1}(y)$ es finito y el entero*

$$d(f, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{signo}_x(f)$$

sólo depende de y_0 .

Demostración. Primero nótese que para cada valor regular y_0 el conjunto compacto $f^{-1}(y_0)$ es discreto. Esto es cierto ya que f es un difeomorfismo local alrededor de cada $x \in f^{-1}(y_0)$. En efecto, la derivada $d_x f$ es un isomorfismo lineal y por ello podemos usar el *Teorema de Inversión Local*. Escribamos pues $f^{-1}(y_0) = \{x_1, \dots, x_r\}$ y sean $U'_k \ni x_k$ abiertos disjuntos tales que $f|_{U'_k}$ es un difeomorfismo sobre un entorno V' de y_0 que podemos tomar común para cada $k \in \{1, \dots, r\}$. Ahora bien, como f es cerrada obtenemos que $f(M \setminus \cup_k U'_k)$ es un cerrado que no contiene a y_0 , luego podemos tomar un entorno conexo $V \subset V'$ de y_0 de tal forma que:

$$V \cap f(M \setminus \cup_k U'_k) = \emptyset.$$

Así pues $f^{-1}(V) \subset \cup_k U'_k$ y por ello si definimos los abiertos disjuntos $U_k = f^{-1}(V) \cap U'_k$ obtenemos que $f^{-1}(V) = \cup_k U_k$ y que cada U_k es difeomorfo a V por f . Nótese que se puede conseguir que V sea difeomorfo a la bola unidad si así se quiere. Finalmente, como cada U_k es conexo, se deduce que $\text{signo}_x(f)$ es constante en cada uno de esos abiertos, de donde se obtiene el resultado. ■

Observación 2.1.2 De la proposición anterior se deduce que $d(f, \cdot) : R_f \rightarrow \mathbb{Z}$ es una función continua. Sin embargo esto no demuestra que d sea constante incluso cuando N es conexa, ya que R_f puede no ser un conjunto conexo (véase el segundo ejemplo de más abajo).

(2.1.3) Estrategia a seguir. Hemos demostrado pues que $d(f, y)$ es localmente constante para $y \in R_f \subset N$. Dado otro $z \in N$ regular, queremos ver que $d(f, z) = d(f, y)$. La *estrategia* será la siguiente: si N es una variedad conexa tomaremos una difeotopía H tal que $H_1(z) = y$, entonces se tendrá que $(H_1 \circ f)^{-1}(y) = f^{-1}(z)$ y que $H_t \circ f$ es una homotopía suave entre f y $H_1 \circ f$. Después demostraremos que

$$d(f, y) = d(H_1 \circ f, y); \tag{2.1}$$

³Una función continua entre dos espacios topológicos es *propia* si es cerrada y además la imagen inversa de cada punto es un compacto.

pero entonces, como los H_t son difeomorfismos que preservan la orientación y por la regla de la cadena

$$\text{signo}_x(H_1 \circ f) = \text{signo}_{f(x)}(H_1) \text{signo}_x(f) = \text{signo}_x(f),$$

y por tanto se tendrá que

$$d(H_1 \circ f, y) = \sum_{x \in (H_1 \circ f)^{-1}(y)} \text{signo}_x(H_1 \circ f) = \sum_{x \in f^{-1}(z)} \text{signo}_x(f) = d(f, z).$$

Para demostrar (2.1) veremos que en general si F es una homotopía e y es un valor regular de ambas F_0 y F_1 entonces $d(F_0, y) = d(F_1, y)$. Esta propiedad se llama *invarianza homotópica* de d . Para ello es necesaria la siguiente proposición.

Proposición 2.1.4 (Teorema del borde). *Sea M una ∂ -variedad compacta, orientada y de dimensión $m + 1$ con borde $\partial M \neq \emptyset$ y sea N una variedad orientada de dimensión m . Sea $F : M \rightarrow N$ una función suave y sea $y \in N$ un valor regular tanto de F como de $F|_{\partial M}$. Entonces:*

$$d(F|_{\partial M}, y) = 0. \quad (2.2)$$

Demostración. Escribamos $f := F|_{\partial M}$ y $C = F^{-1}(y)$. Entonces se tiene que C es una ∂ -variedad compacta de dimensión 1 con borde $\partial C = C \cap \partial M = f^{-1}(y)$. Luego se ha de tener que las componentes conexas Γ_k de C son difeomorfas o bien a circunferencias (que carecen de borde) o bien a arcos con borde $p_k, q_k \in f^{-1}(y)$. Entonces:

$$d(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{signo}_x(f) = \sum_k \text{signo}_{p_k}(f) + \sum_k \text{signo}_{q_k}(f). \quad (2.3)$$

Por tanto, si conseguimos demostrar que $\text{signo}_{p_k}(f) = -\text{signo}_{q_k}(f)$ habremos acabado. Con ese fin (omitimos el índice k), orientemos Γ como imagen inversa de F . Sea $t \mapsto \gamma(t)$ una parametrización de Γ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$ que induzca la orientación elegida anteriormente. Entonces la orientación de $T_{\gamma(t)}\Gamma$ es la dada por $\gamma'(t)$.

Orientaciones en p .

Orientemos a ∂M como el borde de M . Sea $\{u_1, \dots, u_m\}$ una base positiva de $T_p\partial M$. Entonces $\{v, u_1, \dots, u_m\}$ es una base positiva de T_pM si v es cualquier vector saliente. Pero $\gamma'(0)$ es un vector entrante luego podemos tomar $v = -\gamma'(0)$ y queda que

$$-\gamma'(0), u_1, \dots, u_m \quad (2.4)$$

es una base positiva de T_pM . Pero como γ induce una orientación positiva en Γ se debe cumplir que

$$u_1, \dots, u_m, \gamma'(0) \quad (2.5)$$

es una base positiva de T_pM siempre que $d_p f$ mande u_1, \dots, u_m a una base positiva de $T_y N$, esto es, si $\text{signo}_p(f) = +1$. Pero la matriz de cambio de base de (2.4) a (2.5) tiene determinante $(-1)^{m+1}$. Luego $\text{signo}_p(f) = +1$ si y sólo si m es impar.

Orientaciones en q .

El argumento es el mismo, pero ahora en q el vector $\gamma'(1)$ es saliente, luego el determinante del cambio de base es $(-1)^m$. Por ello $\text{signo}_q(f) = +1$ si y sólo si m es par.

Como m debe ser par o impar, queda que $\text{signo}_p(f) = -\text{signo}_q(f)$ luego hemos terminado. \blacksquare

Ya casi estamos listos para demostrar la invarianza homotópica de d . Pero antes discutamos como son las orientaciones en la ∂ -variedad orientada $M' = [0, 1] \times M$ cuando M es una variedad orientada cualquiera. Dadas sendas bases positivas $\{u_1, \dots, u_m\}$ y $\{1\}$ de $T_x M$ y $T_t[0, 1] \cong \mathbb{R}$ respectivamente, según el Ejemplo 1.5.2 una orientación de

$$T_{(t,x)}M' = T_t[0, 1] \times T_x M$$

es la dada por

$$\xi_{(t,x)} = [(1, 0), (0, u_1), \dots, (0, u_m)].$$

Así pues, ξ induce orientaciones $\partial\xi_i$ en $\partial M' = M_0 \cup M_1$ donde $M_i := \{i\} \times M$ es difeomorfa a M para $i = 0, 1$. No obstante, a $\partial M'$ siempre la orientamos con la regla del vector saliente; nótese que $(1, 0)$ es saliente en M_1 pero entrante en M_0 luego la orientación de M_1 coincide con la de M pero la de M_0 es la opuesta.

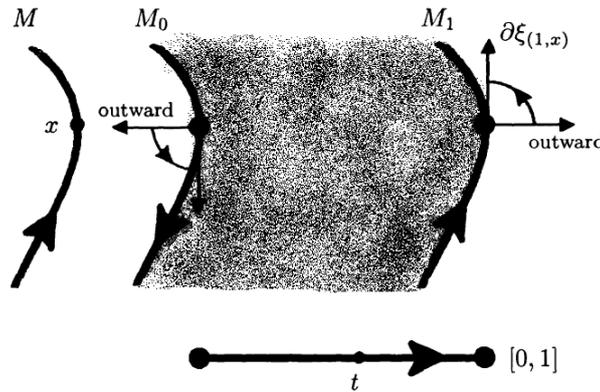


Figura 2.2: M_1 posee la misma orientación que M y M_0 la opuesta.

Proposición 2.1.5 (Invarianza homotópica). Sea $F : [0, 1] \times M \rightarrow N$ una homotopía (suave) entre variedades orientadas de la misma dimensión con M compacta. Si $y \in N$ es un valor regular tanto de F_0 como de F_1 entonces se cumple

$$d(F_0, y) = d(F_1, y).$$

Demostración. Por el Teorema de Sard se puede elegir un valor regular $z \in N$ de F arbitrariamente cerca de y y por la invarianza local de d obtenemos

$$d(F_0, y) = d(F_0, z), \quad d(F_1, y) = d(F_1, z).$$

Ahora bien, el Teorema del Borde y el hecho de que M_0 y M_1 son disjuntas nos dan que

$$0 = d(F|_{M_0 \cup M_1}, z) = d(F|_{M_0}, z) + d(F|_{M_1}, z).$$

Finalmente la discusión anterior implica que

$$d(F|_{M_1}, z) = d(F_1, z) \quad d(F|_{M_0}, z) = -d(F_0, z)$$

de donde se deduce el resultado. ■

De los comentarios hechos en (2.1.3) se deduce

Corolario 2.1.6. Dada una función suave $f : M \rightarrow N$ entre dos variedades orientadas de la misma dimensión con M compacta y N conexa, se cumple que el entero $d(f, y)$ es independiente del valor regular $y \in R_f$ elegido.

Definición 2.1.7 (Grado topológico de Brouwer-Kronecker). Con las hipótesis del corolario anterior se define el grado de f denotado $\deg(f)$ como el entero $d(f, y)$ para cualquier valor regular $y \in R_f$.

Observaciones 2.1.8 (1) La definición anterior depende de las orientaciones elegidas; no obstante, lo importante es que si invertimos la orientación de M o de N entonces $\deg(f)$ cambia de signo.

(2) Si f no es suprayectiva entonces $\deg(f) = 0$. ■

Veamos ahora dos ejemplos:

Ejemplos 2.1.9 (1) Dada la aplicación antipodal $f : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m : x \mapsto -x$ vimos en el Ejemplo 1.5.4 que para cualquier $x \in \mathbb{S}^m$ se cumple $\text{signo}_x(f) = -1$ si m es par, mientras que $\text{signo}_x(f) = +1$ si m es impar. Luego, se tiene que $\deg(f) = (-1)^{m+1}$.

(2) En \mathbb{R}^3 consideremos las siguientes superficies compactas

$$M \equiv x^2 + y^2 + z^4 = 1 \text{ ovoide; } N \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ esfera;}$$

orientadas con su campo gradiente como en el Ejemplo 1.5.3. Sea f la función suave $f : M \rightarrow N$ definida como la restricción a M de $(x, y, z) \mapsto (x, y, z^2)$. Nótese que como f no es suprayectiva de la observación anterior se deduce que $\deg(f) = 0$. Sin embargo es instructivo hacer los cálculos como si no hubiésemos reparado en ello. Consideremos $y \in N$ valor regular de f donde $y = (0, 0, 1)$ y sus preimágenes $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2\} \subset M$ donde $x_1 = (0, 0, 1)$ y $x_2 = (0, 0, -1)$. Entonces es fácil ver que

$$T_{x_1}M = T_{x_2}M \equiv \{z = 0\}$$

y que

$$d_{x_1}f = d_{x_2}f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = dF|_{\{z=0\}}.$$

Consideremos entonces la base $B = \{e_1, e_2\}$ de $\{z = 0\}$ donde $e_1 = (1, 0, 0)$ y $e_2 = (0, 1, 0)$. Es claro que B es una base positiva de $T_{x_1}M$ pero negativa de $T_{x_2}M$ y que tanto $d_{x_1}f$ como $d_{x_2}f$ mandan B a sí misma. Asimismo es fácil ver que B es una base positiva de T_yN , luego $\text{signo}_{x_1}(f) = +1$ y $\text{signo}_{x_2}(f) = -1$ lo que implica que $\deg(f) = 0$. Veamos que esto tiene la siguiente bonita consecuencia geométrica: si ω es una 2-forma de N , sabemos que $f^*\omega$ es una 2-forma en M (donde f^* denota la aplicación retrogradiente) entonces se tiene que:

$$\int_M f^*\omega = \deg(f) \cdot \int_N \omega = 0.$$

En efecto, la forma de volumen de la esfera viene dada por

$$\Omega_N = xdydz - ydxdz + zdxdy,$$

y la del ovoide por

$$\Omega_M = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4z^6}}(xdydz - ydxdz + 2z^3dxdy),$$

tras un cálculo, para $z \neq 0$ resulta que

$$f^*\Omega_N = h(x, y, z) \cdot \Omega_M \quad \text{para} \quad h(x, y, z) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+4z^6}}{2z},$$

mientras que $f^*\Omega_N \equiv 0$ si $z = 0$. Luego vemos que los puntos críticos de f son justamente aquellos que tienen coordenada $z = 0$ y que f preserva la orientación en $\Sigma_+ : z > 0$ y la invierte en $\Sigma_- : z < 0$. Entonces por el *Teorema del cambio de variables* y usando que $C_f = \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{S}^2$ tiene medida nula queda que

$$\int_M f^*\omega = \int_{\Sigma_+} f^*\omega + \int_{\Sigma_-} f^*\omega = \int_{\mathcal{Y}_+} \omega - \int_{\mathcal{Y}_+} \omega = 0,$$

donde $\mathcal{Y}_+ = f(\Sigma_+) = f(\Sigma_-)$ es el casquete superior de la esfera. En el capítulo cuatro generalizaremos las ideas desarrolladas en este ejemplo. Véase la Proposición 4.3.1. \blacksquare

Teorema 2.1.10 (Propiedades fundamentales del grado). *El grado de Brouwer-Kronecker tiene las siguientes propiedades:*

(i) **Teorema del borde.** *Sea M una variedad orientada y compacta de dimensión $m + 1$, N una variedad orientada y conexa de dimensión m y $H : M \rightarrow N$ una función suave, entonces $\deg(H|_{\partial M}) = 0$.*

(ii) **Invarianza homotópica.** *Si $F : [0, 1] \times M \rightarrow N$ es una homotopía entre variedades orientadas de la misma dimensión, con M compacta y N conexa, entonces*

$$\deg(F_0) = \deg(F_1).$$

(iii) **Composición de funciones.** *Sean M, N, \tilde{N} variedades orientadas de la misma dimensión con M, N compactas y N, \tilde{N} conexas. Sean $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow \tilde{N}$ funciones suaves. Entonces la composición $g \circ f : M \rightarrow \tilde{N}$ tiene grado*

$$\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f).$$

(iv) **Principio de no retracción.** *Sea M una ∂ -variedad orientada y compacta con borde ∂M conexo. Entonces ∂M no es una retracción de M , es decir, no existe una función suave $\rho : M \rightarrow \partial M$ que restringida a ∂M sea la identidad.*

Demostración. (i) Gracias al Teorema de Sard, los conjuntos R_H y $R_{H|_{\partial M}}$ son (abiertos) densos en N , luego podemos escoger un $y \in N$ que sea a la vez valor regular de H y de $H|_{\partial M}$. Pero entonces por el Teorema del Borde para $d(H|_{\partial M}, \cdot)$ se deduce que

$$\deg(H|_{\partial M}) = d(H|_{\partial M}, y) = 0.$$

(ii) De nuevo por el Teorema de Sard, los conjuntos R_{F_0} y R_{F_1} son (abiertos) densos en N , luego podemos escoger un $y \in N$ que sea a la vez valor regular de F_0 y de F_1 . Pero entonces por la invarianza homotópica de d se deduce que

$$\deg(F_0) = d(F_0, y) = d(F_1, y) = \deg(F_1).$$

(iii) Es consecuencia de la regla de la cadena $d(g \circ f) = dg \circ df$ y algunos cálculos.

(iv) Si existiera una retracción de M en ∂M usando el Teorema del Borde se tendría que

$$0 = \deg(\rho|_{\partial M}) = \deg(\text{Id}_{\partial M})$$

lo cual es claramente absurdo. ■

(2.1.11) Grado para funciones continuas. Usando la invarianza homotópica del grado es posible generalizarlo y definirlo para una clase de funciones más amplia: las continuas. La idea es aproximar cualquier función continua por una función suave y definir su grado como el de la aproximante. Nosotros no haremos uso de esa construcción. Para más detalles véase [5].

2.2. Aplicaciones.

Del principio de no retracción de desprende el siguiente célebre teorema.

Corolario (Teorema del punto fijo de Brouwer). *Cualquier función continua $f : \mathbb{D}^{m+1} \rightarrow \mathbb{D}^{m+1}$ admite al menos un punto fijo, es decir, un x_0 tal que $f(x_0) = x_0$.*

Demostración. El teorema es cierto para el caso en el que f es una función suave ya que si f no tuviera ningún punto fijo podríamos definir una retracción de \mathbb{D}^{m+1} en $\partial\mathbb{D}^{m+1} = \mathbb{S}^m$ de la siguiente forma: dado cualquier $x \in \mathbb{D}^{m+1}$, como $f(x) \neq x$ definimos

$$\rho(x) = f(x) + \lambda(x)(x - f(x))$$

para $\lambda(x) > 0$ elegido tal que $\|\rho(x)\| = 1$. Es decir, $\rho(x)$ es la intersección de \mathbb{S}^m con la recta que parte de $f(x)$ con dirección $[f(x), x]$. Como tal retracción no puede existir, f admite un punto fijo. Supongamos ahora que f es sólo continua. Sea

$$\epsilon = \min_{x \in \mathbb{D}^{m+1}} \|f(x) - x\| \leq 2.$$

Si $\epsilon = 0$ hemos acabado. Supongamos pues que $\epsilon > 0$ y sea $g : \mathbb{D}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ una función suave tal que

$$\max_{x \in \mathbb{D}^{m+1}} \|g - (1 - \frac{\epsilon}{2})f\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ahora bien para $\|x\| \leq 1$ se cumple

$$\|g\| \leq \|g - (1 - \frac{\epsilon}{2})f\| + \|(1 - \frac{\epsilon}{2})f\| \leq 1,$$

luego g admite un punto fijo x_0 , pero entonces

$$\epsilon \leq \|f(x_0) - x_0\| = \|f(x_0) - g(x_0)\| = \|\frac{\epsilon}{2}f(x_0) + (1 - \frac{\epsilon}{2})f(x_0) - g(x_0)\| < \epsilon. \quad \blacksquare$$

El Teorema del punto fijo se puede parafrasear así: *Supongamos que llenamos de agua completamente una esfera y que la calentamos durante diez minutos. Durante ese tiempo, las moléculas de agua de dentro de la esfera se habrán movido de forma casi impredecible; sin embargo, existe al menos una molécula que terminó su travesía justo donde la empezó.*

(2.2.1) Aplicaciones de la circunferencia en sí misma.

Para finalizar esta sección volvamos al ejemplo de las funciones de la circunferencia en sí misma. Recuérdense que habíamos obtenido que $\deg(z^d) = d$. Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ una función suave. Sea

$$\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \quad t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

la aplicación *recubridora*. Entonces existe una función *elevación* $\tilde{f} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ suave tal que $f \circ \pi|_{[0, 2\pi]} = \pi \circ \tilde{f}$ y además

$$\deg(f) = \frac{\tilde{f}(2\pi) - \tilde{f}(0)}{2\pi}. \quad (2.6)$$

En efecto, que tal elevación existe es un resultado básico de Topología que se imparte en el grado (ver [3]). Veamos que se ha de cumplir (2.6). Se tiene que

$$f(1, 0) = f(\cos 0, \operatorname{sen} 0) = f(\cos 2\pi, \operatorname{sen} 2\pi),$$

luego

$$\pi \circ \tilde{f}(0) = \pi \circ \tilde{f}(2\pi),$$

por tanto $\tilde{f}(2\pi) = \tilde{f}(0) + 2\pi d$ para $d \in \mathbb{Z}$. Pero entonces \tilde{f} es homótopa a la función

$$g(t) = \tilde{f}(0) + t \cdot d, \quad t \in [0, 2\pi]$$

y además $g(0) = \tilde{f}(0)$ y $g(2\pi) = \tilde{f}(2\pi)$ luego $\pi \circ \tilde{f}$ es homótopa a $\pi \circ g$. Por lo tanto $f \circ \pi|_{[0, 2\pi]}$ es homótopa a la función $\pi(\tilde{f}(0) + t \cdot d)$ que cumple que

$$\pi(\tilde{f}(0)) = \pi(\tilde{f}(2\pi)) = \pi(\tilde{f}(0) + 2\pi d)$$

y por ello $d = \deg(z^d) = \deg(f)$.

De lo anterior se deduce que dos funciones suaves de la circunferencia en sí misma son homótopas si y sólo si tienen el mismo el grado. Este resultado se cumple en general para esferas de cualquier dimensión (y funciones continuas) y se conoce como el *Teorema de Hopf*. En las siguientes secciones exploraremos más este tema.

2.3. Número de vueltas.

Definición 2.3.1 (Número de vueltas). Sea M una ∂ -variedad compacta y orientada de dimensión $m + 1$ con borde ∂M . Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ una función suave y sea $a \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus f(\partial M)$ un valor regular de f . Consideremos la función suave $g : \partial M \rightarrow \mathbb{S}^m$ definida como

$$g(x) = \frac{f(x) - a}{\|f(x) - a\|}.$$

Se llama *número de vueltas de f alrededor de a* , y se denota $w(f, a)$, al entero $\deg(g)$.

En el caso en el que $\partial M = \mathbb{S}^1$ podemos identificar $f(\mathbb{S}^1) = \Gamma$ con una curva cerrada en \mathbb{R}^2 y nos queda que $w(f, a)$ simplemente cuenta el número de veces que Γ se *enrolla* sobre a .

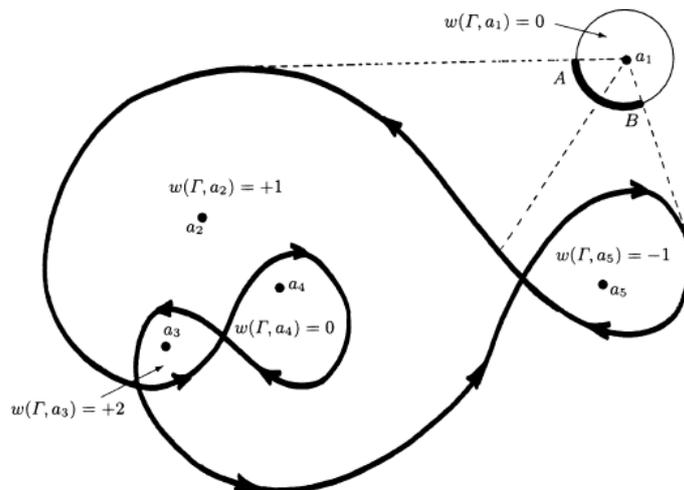


Figura 2.3: $w(f, a)$ para distintos valores de a .

La siguiente proposición nos proporciona una manera fácil de calcular $w(f, a)$.

Proposición 2.3.2. Con las hipótesis de la definición anterior se verifica que $f^{-1}(a)$ es finito y además

$$w(f, a) = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \text{signo}_x(f).$$

Demostración. Usando el mismo argumento que en la demostración de la invarianza local de d obtenemos que $f^{-1}(a) = \{x_1, \dots, x_r\}$ y que existen abiertos disjuntos $U_k \ni x_k$ tales que $f|_{U_k} : U_k \rightarrow B_a$ es un difeomorfismo sobre la bola abierta centrada en a . Sea ahora $D \subset B_a$ una bola cerrada más pequeña de centro a con borde la esfera S_a y definamos $V_k = f^{-1}(D) \cap U_k$. Por restricción obtenemos difeomorfismos

$$f|_{V_k} : V_k \rightarrow D \text{ con } f(\partial V_k) = S_a.$$

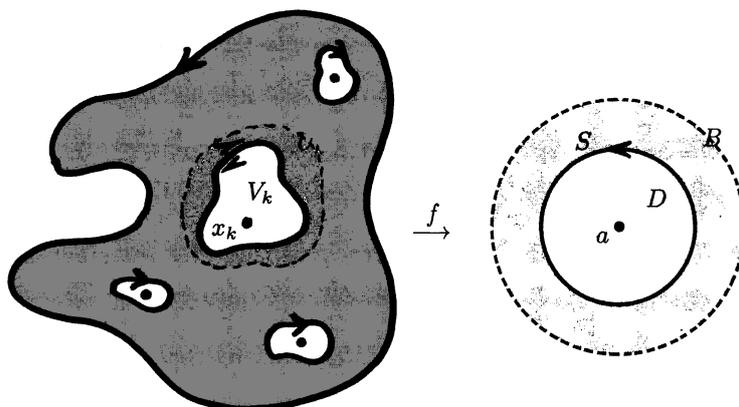


Figura 2.4: ∂V_k hereda de V la orientación opuesta a la que tendría como borde de V_k .

Nótese que ahora cada V_k es cerrado. Definamos $V = M \setminus \cup_k \text{int}(V_k)$. Entonces V es una ∂ -variedad compacta con borde $\partial V = \partial M \cup_k \partial V_k$, donde como siempre tanto ∂M como los ∂V_k están orientados como los bordes de V . Ahora bien, como $a \notin f(V)$, podemos extender $g := \frac{f-a}{\|f-a\|}$ a todo V y por tanto el Teorema del Borde implica que

$$0 = \deg(g|_{\partial V}) = \deg(g|_{\partial M}) - \sum_k \deg(g|_{\partial V_k}),$$

donde hemos usado que cada ∂V_k hereda de V la orientación opuesta a la que tendría como borde de V_k . Luego tenemos que

$$w(f, a) = \sum_k \deg(g|_{\partial V_k}).$$

Si llamamos $r > 0$ al radio de S_a entonces gracias a que $f(\partial V_k) = S_a$ se cumple que

$$g|_{\partial V_k} = \frac{1}{r}(f|_{\partial V_k} - a),$$

y entonces $\deg(g|_{\partial V_k}) = \deg(f|_{\partial V_k})$ ya que $\frac{x}{r}$ y $x - a$ son difeomorfismos que preservan la orientación. Finalmente si $\text{signo}_{x_k}(f) = +1$ (o -1) entonces el difeomorfismo $f|_{V_k} : V_k \rightarrow D$ preserva (o invierte) la orientación. Luego la restricción $f|_{\partial V_k} : \partial V_k \rightarrow S_a$ preserva (o invierte) la orientación y por ello tiene grado $+1$ (o -1). Consecuentemente

$$\deg(f|_{\partial V_k}) = \text{signo}_{x_k}(f),$$

de donde se obtiene el resultado. ■

2.4. Teorema de Hopf.

Ya tenemos los ingredientes esenciales para demostrar un caso particular del Teorema de Hopf el cual nos será de gran utilidad más adelante cuando estudiemos el Teorema del Índice. Antes necesitamos el siguiente lema técnico.

Lema 2.4.1. *Supongamos que tenemos una función suave*

$$f : \mathbb{R}^{m+1} \setminus \text{int}(\mathbb{D}^{m+1}) \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}.$$

Denotemos $\partial f := f|_{\mathbb{S}^m}$ y supongamos que $\partial f : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ es nulhomótopa. Entonces es posible extender f a una función suave $F : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ nunca nula.

Demostración. Es claro que si la extensión es posible, entonces el resultado será válido también para cualquier otro disco cerrado de radio y centro arbitrarios. Sea

$$\tilde{f} : \{\|x\| \geq \eta\} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$$

una extensión continua de f , suave cuando $\|x\| > \eta$ para cierto $0 < \eta < 1$. Dicha extensión puede construirse de la siguiente forma: sea

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$$

una extensión suave de f . Definamos la sucesión creciente y convergente a 1 de escalares

$$\eta_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Ahora bien, si existe algún $n \geq 1$ tal que \tilde{f} no se anula en

$$A_n := \{1 \geq \|x\| \geq \eta_n\},$$

entonces hemos acabado ya que podemos tomar $\eta = \eta_n$. En otro caso, existiría una sucesión de puntos $(x_n)_n$ con $1 \geq \|x_n\| \geq 1 - \frac{1}{n}$ tales que $\tilde{f}(x_n) = 0$ para todo n . Al ser \mathbb{D}^{m+1} un compacto que contiene a todos los x_n podemos encontrar una subsucesión $(x_i)_i$ convergente a un $x^* \in \mathbb{D}^{m+1}$. Finalmente como

$$1 = \lim_i \|x_i\| = \|x^*\|,$$

tendríamos que

$$0 = \lim_i \tilde{f}(x_i) = \tilde{f}(x^*),$$

lo cual contradice nuestras hipótesis. Sea ahora $\epsilon > 0$ tal que $\eta < \epsilon < 1$ y además

$$\frac{\tilde{f}(x)}{\|\tilde{f}(x)\|} \neq -\frac{\tilde{f}(\epsilon \frac{x}{\|x\|})}{\|\tilde{f}(\epsilon \frac{x}{\|x\|})\|} \quad \text{para } \epsilon \leq \|x\| \leq 1.$$

Este ϵ siempre existe por continuidad (usando un argumento análogo al anterior) ya que

$$\frac{\tilde{f}(x)}{\|\tilde{f}(x)\|} + \frac{\tilde{f}(t \frac{x}{\|x\|})}{\|\tilde{f}(t \frac{x}{\|x\|})\|} \neq 0 \quad \text{en } t = \|x\| = 1.$$

Además, es claro que $\tilde{f}|_{\|x\|=\epsilon}$ es homótopa a ∂f luego ella misma es nulhomótopa. En efecto, la homotopía

$$[0, 1] \times \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} : (t, x) \mapsto (1-t) \cdot \tilde{f}(\epsilon x) + t \cdot \partial f(x)$$

está bien definida por la desigualdad anterior. Denotemos por

$$H_t : \{\|x\| = \epsilon\} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$$

la homotopía entre $H_1 = \tilde{f}|_{\|x\|=\epsilon}$ y una constante $H_0 = \text{cte} \neq 0$. Así pues, definamos la siguiente función suave

$$g : \{\|x\| < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} : g(x) = H_{\mu(x)}\left(\epsilon \frac{x}{\|x\|}\right),$$

donde $\mu \geq 0$ es una función meseta tal que

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|x\| \geq \epsilon, \\ 0 & \text{si } \|x\| < \eta, \end{cases}$$

luego tenemos que para $\|x\| \geq \epsilon$ se tiene $g(x) = \tilde{f}(\epsilon \frac{x}{\|x\|})$. Ahora sí, definimos la extensión buscada $F : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ como

$$F(x) = \varphi(x)\tilde{f}(x) + (1 - \varphi(x))g(x),$$

donde $\varphi \geq 0$ es una función meseta tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|x\| \geq \delta, \\ 0 & \text{si } \|x\| < \epsilon, \end{cases}$$

para $\epsilon < \delta < 1$ cualquiera. Es claro que F es una función suave que extiende a f . Sólo nos falta por comprobar que nunca es nula. En efecto, si

$$\varphi(x)\tilde{f}(x) + (1 - \varphi(x))g(x) = 0,$$

entonces necesariamente ha de ser que $\epsilon \leq \|x\| < \delta$ y que $\varphi(x) \neq 0, 1$. Pero entonces se tendría

$$\tilde{f}(x) = -\lambda g(x) \text{ para } \lambda > 0,$$

luego normalizando tendríamos que

$$\frac{\tilde{f}(x)}{\|\tilde{f}(x)\|} = -\frac{g(x)}{\|g(x)\|},$$

pero en $\epsilon \leq \|x\|$ se tiene que $g(x) = \tilde{f}(\epsilon \frac{x}{\|x\|})$ lo cual contradice la elección inicial del ϵ . ■

Dada $f : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$ suave, sabemos que si f es nulhomótopa entonces $\deg(f) = 0$. El recíproco también es cierto y es el contenido del siguiente teorema.

Teorema 2.4.2. *Si $f : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$ es una función suave tal que $\deg(f) = 0$ entonces f es nulhomótopa.*

Antes de la prueba veamos un corolario.

Corolario 2.4.3. *Sea $f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ una función suave que tenga al origen como valor regular $0 \in R_f$. Supongamos además que $f^{-1}(0)$ es finito y que*

$$\sum_{x \in f^{-1}(0)} \text{signo}_x(f) = 0.$$

Entonces existe una función suave $g : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ tal que $g = f$ fuera de cualquier bola compacta prefijada que contenga a $f^{-1}(0)$.

Demostración del corolario. Sea D_r una bola cerrada centrada en el origen con $r > 0$ suficientemente grande para que $f^{-1}(0) \subset \text{int}(D_r)$. Denotemos $S = \partial D_r$, entonces se tiene que $0 \notin f(S)$ y por tanto

$$w(f|_{D_r}, 0) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} \text{signo}_x(f) = 0,$$

donde hemos usado la Proposición 2.3.2 en la primera igualdad. Luego por definición del número de vueltas, $\deg(h) = 0$ donde

$$h : S \rightarrow \mathbb{S}^m : h(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}.$$

Por tanto h es nulhomótopa. Pero h y $\partial f := f|_S$ son homótopas como funciones de S en $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ luego

$$\partial f : S \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$$

es nulhomótopa y por ello del lema técnico obtenemos la función g requerida. ■

Veamos ahora la demostración del teorema. La idea es *perturbar* f ligeramente de forma que se obtenga una función homótopa a ella que no sea suprayectiva.

Demostración del Teorema. La prueba se hará por inducción en la dimensión de la esfera m . Para $m = 1$ ya vimos que el resultado es cierto en (2.2.1). Supongamos pues que el resultado es cierto para $m - 1$ y veámoslo para m . Sea $f : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$ una función suave de grado nulo. Sean $a, b \in \mathbb{S}^m$ dos valores regulares de f , luego se cumple

$$f^{-1}(a) \cap f^{-1}(b) = \emptyset.$$

Ahora bien, la variedad $\mathbb{S}^m \setminus f^{-1}(b)$ es conexa ya que $m > 1$, luego por el corolario del lema de difeotopía existe un abierto $U \subset \mathbb{S}^m \setminus f^{-1}(b)$ difeomorfo a \mathbb{R}^m que contiene a $f^{-1}(a)$. Nótese que entonces se tiene que $b \notin f(U)$. Sea ahora

$$\alpha : \mathbb{R}^m \rightarrow U$$

cualquier difeomorfismo y

$$\beta : \mathbb{S}^m \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

otro difeomorfismo tal que $\beta(a) = 0$ (la composición de la proyección estereográfica con una traslación valdría). Entonces se tiene que $F := \beta \circ f \circ \alpha$

$$F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

es una función suave que tiene al cero como valor regular, $F^{-1}(0) = \alpha^{-1}(f^{-1}(a))$ es finito y satisface

$$\sum_{x \in F^{-1}(0)} \text{signo}_x(F) = \pm \deg(f) = 0.$$

Estamos suponiendo que el teorema es cierto para $m - 1$ luego el corolario anterior se cumple para funciones suaves de \mathbb{R}^m en sí mismo y por ello obtenemos una función suave

$$G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\},$$

tal que $G \equiv F$ fuera de un compacto $K \supset F^{-1}(0)$. Definamos ahora una función suave

$$g : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$$

de la siguiente forma

$$g = f \text{ en } \mathbb{S}^m \setminus \alpha(K) \quad \& \quad g = \beta^{-1} \circ G \circ \alpha^{-1} \text{ en } \alpha(B),$$

donde $B \subset \mathbb{R}^m$ es una bola abierta que contenga a K (y por tanto a todos los ceros de F). Nótese que ambas definiciones coinciden en el abierto $\alpha(B) \setminus \alpha(K)$ luego g es suave. Si conseguimos demostrar que g es homótopa a f y que a no está en su imagen habremos acabado ya que cualquier función que no es suprayectiva es nulhomótopa.

Primero veamos que a no está en su imagen. En efecto, si $g(x) = a$ tendríamos que tener que $x \in \mathbb{S}^m \setminus \alpha(K)$ o $x \in \alpha(B)$. Lo primero es imposible ya que allí $g \equiv f$ y como $\alpha(F^{-1}(0)) \subset \alpha(K)$ tenemos que $f^{-1}(a) \subset \alpha(K)$. Si se diera lo segundo tendríamos que

$$G \circ \alpha^{-1}(x) = \beta(a) = 0,$$

lo cual es imposible por la definición de G .

Finalmente mostremos que f y g son homótopas. Es claro que F y G son homótopas como funciones de \mathbb{R}^m en sí mismo a través de una homotopía que podemos suponer que es igual a $G \equiv F$ fuera de K . Esa homotopía define a su vez otra homotopía h_t en $U \subset \mathbb{S}^m$ entre f y la función

$$\beta^{-1} \circ G \circ \alpha^{-1} : U \rightarrow \mathbb{S}^m \setminus \{a, b\}$$

que es justamente g . Además, $h_t \equiv f \equiv g$ fuera de $\alpha(K)$ luego podemos definir la siguiente homotopía suave $H_t : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$ entre f y g :

$$H_t = \begin{cases} h_t & \text{en } U, \\ g & \text{en } \mathbb{S}^m \setminus \alpha(K). \end{cases}$$

■

Observación 2.4.4 En el capítulo cuatro daremos una aplicación interesante del Corolario 2.4.3. Básicamente, bajo ciertas hipótesis ese resultado nos permitirá *perturbar* campos tangentes de forma controlada para que nunca se anulen.

(2.4.5) Caso general del Teorema de Hopf. A partir del caso particular que acabamos de demostrar es posible probar la versión general del teorema, es decir, que

si $\deg(f_0) = \deg(f_1)$ entonces f_0 y f_1 son homótopas.

No obstante, para nosotros sólo será necesario el Corolario 2.4.3. Para la demostración completa (en forma de ejercicios guiados) del Teorema de Hopf, véase [14]. Para otra demostración más constructiva, véase [5].

Capítulo 3

Singularidades de Campos Tangentes.

En este tercer capítulo se define el *índice de una singularidad aislada*; esta será nuestra principal herramienta en el siguiente capítulo cuando demostremos el Teorema del Índice. Para las primeras dos secciones recomendamos de nuevo [5], mientras que para las dos últimas el libro de Milnor [11]. En la sección uno se define el *índice de un cero aislado* y se dan algunos ejemplos sencillos de su cómputo. En la sección dos se definen un tipo especial de campos tangentes importantes: los *campos gradientes*. En la siguiente sección, la tres, se demuestra el *lema de Morse* y por último, en la cuarta se da una caracterización topológica de la esfera (*Teorema de Reeb*).

3.1. Índice de una singularidad.

(3.1.1) Motivación. Supongamos que queremos resolver un problema que se modeliza con la siguiente ecuación diferencial ordinaria autónoma

$$\frac{du}{dt} = \xi(u) \text{ con condición inicial } u(0) = x \in \mathbb{R}^{m+1}. \quad (3.1)$$

donde $\xi : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ es una función suave, luego existe solución y es única. Supongamos además que la naturaleza de nuestro problema impone una ligadura de la forma

$$F(u) = 0,$$

donde $F : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave. Es decir, las soluciones de (3.1) han de satisfacer para todo t donde estén definidas que

$$F(u(t)) = 0;$$

tomando derivadas con respecto a t queda que

$$0 = \langle \text{grad}_u(F), u' \rangle = \langle \text{grad}_u(F), \xi(u) \rangle,$$

luego si suponemos que $\text{grad}_x(F) \neq 0$ para todo x tal que $F(x) = 0$ esto implica que para que nuestro problema este bien planteado ξ debe ser un campo tangente a la variedad

$$M = F^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : F(x) = 0\}.$$

Supongamos ahora que $m = 2$ y que $M = \mathbb{S}^2$, es decir, que F es una ligadura que obliga a todas las soluciones u a moverse por la esfera 2-dimensional. Veamos que necesariamente ha de existir un

$x \in \mathbb{S}^2$ tal que $\xi(x) = 0$ es decir, ξ debe admitir al menos un equilibrio. En efecto, si este no fuera el caso podríamos definir una función suave

$$\eta : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 : \quad x \mapsto \frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|},$$

que además cumpliría que

$$0 = \langle x, \eta(x) \rangle,$$

ya que ξ es tangente a la esfera. Luego podríamos definir una homotopía $H : [0, 1] \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$:

$$H_t(x) = \cos(\pi t)x + \text{sen}(\pi t)\eta(x)$$

entre la identidad $x \mapsto x$ y la aplicación antipodal $x \mapsto -x$; pero entonces

$$1 = \text{deg}(x) = \text{deg}(-x) = (-1)^{2+1} = -1,$$

lo cual es claramente absurdo.

Así pues, vemos que la *topología* de \mathbb{S}^2 obliga a cualquier campo tangente definido sobre ella misma a tener al menos un cero. Es claro que el argumento anterior funciona igual para cualquier esfera de dimensión par; sin embargo, en esferas de dimensión impar es muy fácil construir campos tangentes nunca nulos. Por ejemplo en \mathbb{S}^3 uno de ellos es:

$$\xi_x = (-x_2, x_1, -x_4, x_3).$$

¿Qué tienen de especial las esferas de dimensión impar que hace que acepten campos nunca nulos? La respuesta es muy simple aunque profunda: la *característica de Euler* de las esferas impares es nula. El objetivo de este capítulo es el de asentar las bases para el estudio de la relación que hay entre la topología de una variedad y los equilibrios de un campo tangente a ella.

Observación 3.1.2 El hecho de que cualquier campo tangente a la esfera 2-dimensional acepte al menos un cero se conoce popularmente como el *Teorema de la bola peluda*. El motivo es el siguiente: si nos imaginamos una esfera peluda, es decir, a cada punto de la esfera se le ingerta un pelo (vector); un campo tangente a la esfera sencillamente es un peinado (bien peinado, ¡no valen crestas!) que haga que todos los pelos reposen sobre la esfera. Entonces en cualquier peinado se debe formar un remolino (cero) en algún sitio.

(3.1.3) Índice de una singularidad no degenerada. Dada una variedad $M \subset \mathbb{R}^q$ de dimensión m recordemos que un campo tangente a M es una aplicación suave

$$\xi : M \rightarrow \mathbb{R}^q : \quad p \mapsto \xi(p) \in T_p M.$$

Asumiremos pues, que todos los campos tangentes son suaves, es decir, de clase infinito. Dada una parametrización $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset M$ sabemos que una base de $T_p M$ es la formada por las derivadas parciales $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}_i$ inducidas por φ . En nuestro caso, como la variedad está embebida en \mathbb{R}^q se tiene que si $\varphi(x) = p$ entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_p = d_x \varphi(e_i) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \quad 1 \leq i \leq m,$$

luego podemos escribir

$$\xi(p) = \xi(\varphi(x)) = \sum_{i=1}^m \xi_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x),$$

donde cada $\xi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ está determinada de forma única y es una función suave. Consideraremos la siguiente función suave inducida por ξ

$$\bar{\xi} : U \rightarrow \mathbb{R}^m : x \mapsto (\xi_1(x), \dots, \xi_m(x)).$$

Supongamos ahora que $p = \varphi(x)$ es un **cero (o singularidad)** de ξ , es decir, $\xi_i(x) = 0$ para todo i . Entonces

$$\begin{aligned} d_p \xi \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \Big|_p \right) &= d_x(\xi \circ \varphi)(e_j) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\xi \circ \varphi)(x) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) + \sum_{i=1}^m \xi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}(x) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(x) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \Big|_p, \end{aligned}$$

luego tenemos definida una aplicación lineal $d_p \xi : T_p M \rightarrow T_p M$ la cual tiene matriz asociada $J_x \bar{\xi}$ respecto a la base inducida por φ . En particular el determinante de $d_p \xi$ es un invariante del campo ξ :

$$\det(d_p \xi) = \det(J_x \bar{\xi}), \quad J_x \bar{\xi} = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j}.$$

Así pues, diremos que el cero p de ξ es **no degenerado** si $\det(d_p \xi)$ es distinto de cero. Esto es equivalente a exigir que **la localización** $\bar{\xi} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ sea un difeomorfismo local alrededor de x . Nótese que esto implica que $\bar{\xi}$ es localmente inyectiva luego el cero p es **aislado**. Si p es un cero no degenerado se define **el índice de ξ en p** como

$$\text{ind}_p(\xi) = \text{signo} \det(d_p \xi) = \text{signo}_x(\bar{\xi}).$$

Observaciones 3.1.4 Nótese que que el índice de un campo es una cuestión claramente local, luego no hace falta que M sea orientable para que la definición tenga sentido. Asimismo si $f : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo local entre variedades y ξ es un campo de M entonces alrededor de cada $f(p) = q \in N$ podemos definir un campo $\eta(q) := d_p f(\xi(p))$ y se cumple que si p es un cero no degenerado de ξ entonces $q = f(p)$ es un cero no degenerado de η y además

$$\text{ind}_q(\eta) = \text{ind}_p(\xi).$$

(3.1.5) Interpretación geométrica del índice. Sea p un cero no degenerado del campo ξ de M . Sea $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset M$ una parametrización alrededor de $p = \varphi(x)$ y $D \subset U$ una bola cerrada con centro x . Entonces según la Proposición 2.3.2, se cumple para $\bar{\xi}|_D : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ que

$$w(\bar{\xi}|_D, 0) = \deg \left(\frac{\bar{\xi}}{\|\bar{\xi}\|} \Big|_{\partial D} \right) = \text{signo}_x(\bar{\xi}|_D) = \text{ind}_p(\xi). \quad (3.2)$$

Luego vemos que el índice simplemente es el número de vueltas del campo $\bar{\xi}$ alrededor del 0. Geométricamente para $m = 2$ el índice se puede calcular así: escójase una circunferencia S suficientemente pequeña alrededor de x de tal forma que x sea el único cero de $\bar{\xi}$ dentro de S . En cada punto de S el campo $\bar{\xi}$ apunta en una dirección. Si comenzamos en un punto cualquiera de S y damos una vuelta completa a S en el sentido de las agujas del reloj, el campo vuelve al mismo punto de partida con la misma dirección con la que empezó. No obstante, en el camino por S la dirección del campo ha ido cambiando. El índice simplemente es la suma de todas las vueltas que ha dado el campo sobre sí

mismo mientras recorría S , teniendo en cuenta que una vuelta es *positiva* si fue dada en el sentido de las agujas del reloj y *negativa* en el otro caso.

$$\begin{cases} \xi = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}, & \bar{\xi} = (x, -y), \\ d_{(0,0)} \bar{\xi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \text{ind}_0 \xi = \text{sign}_0 \bar{\xi} = -1 \end{cases}$$

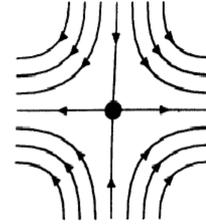


Figura 3.1: Aquí se dibujan las curvas integrales $c(t)$ del campo ξ : $c'(t) = \xi(c(t))$.

La ventaja que tiene esta interpretación geométrica es que en ningún sitio usamos que el cero sea no degenerado; de hecho, veremos que podemos definir también el índice de un cero degenerado usando (3.2). Antes veamos una proposición.

Proposición 3.1.6 (Descomposición de ceros aislados). *Sea ξ un campo tangente a M con un único cero p en el abierto $\Omega \subset M$. Entonces existen un entorno abierto U de p tal que $\bar{U} \subset \Omega$ y un campo η tangente a M que satisfacen lo siguiente:*

- (1) \bar{U} es una variedad compacta con borde $Z = \bar{U} \setminus U$.
- (2) $\eta \equiv \xi$ fuera de U .
- (3) η tiene un número finito de ceros en Ω , todos ellos están en U y son no degenerados.

Diremos que η es una **descomposición** de ξ en p .

Demostración. Basta hacer la demostración para el caso en el que $\Omega = \mathbb{R}^m$, $\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $p = 0$ ya que el contenido de la proposición es local. Como ξ ($1 \leq \|x\| \leq 2$) es un compacto que no contiene al cero podemos escoger por el Teorema de Sard un valor regular a de ξ tal que

$$\|a\| < \|\xi(x)\| \text{ para } 1 \leq \|x\| \leq 2.$$

Sea ahora θ una función meseta $0 \leq \theta \leq 1$ tal que $\theta \equiv 1$ en $\|x\| \leq 1$ y $\theta \equiv 0$ en $\|x\| \geq 2$. Es fácil ver que si definimos $\eta = \xi - a\theta$ y $U : \|x\| < 2$ se cumplen las condiciones del enunciado. ■

Podemos ver ahora una caracterización análoga a la de (3.2).

Proposición 3.1.7. *Sea ξ un campo tangente a M con un cero aislado p contenido en un abierto Ω correspondiente a una parametrización $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \Omega$. Sea η una descomposición de ξ en p como en la proposición anterior. Entonces*

$$\sum_{p^*} \text{ind}_{p^*}(\eta) = \deg \left(\frac{\bar{\xi}}{\|\bar{\xi}\|} |_{S_x} \right),$$

donde $\bar{\xi}$ es la localización de ξ respecto a φ , cada p^* es un cero (no degenerado) de η y S_x es cualquier esfera suficientemente pequeña centrada en $x = \varphi^{-1}(p)$. Por lo tanto la suma anterior no depende ni de la parametrización φ ni de la descomposición η .

Demostración. Consideremos el abierto $U \subset \Omega$ asociado a la descomposición η y su borde $Z = \bar{U} \setminus U$. Definamos $X = \varphi^{-1}(Z)$ y para cada cero p^* de η denotemos $x^* = \varphi^{-1}(p^*)$. Luego

$$\sum_{p^*} \text{ind}_{p^*}(\eta) = \sum_{x^*} \text{signo}_{x^*}(\bar{\eta}) = \deg \left(\frac{\bar{\eta}}{\|\bar{\eta}\|} \Big|_X \right) = \deg \left(\frac{\bar{\xi}}{\|\bar{\xi}\|} \Big|_X \right) = \deg \left(\frac{\bar{\xi}}{\|\bar{\xi}\|} \Big|_{S_x} \right).$$

Donde la primera igualdad es por definición de cero no degenerado, la segunda por la Proposición 2.3.2 sobre el número de vueltas, la tercera porque $\xi \equiv \eta$ en Z y la cuarta usando el Teorema del Borde y un argumento enteramente análogo al usado en la demostración de la Proposición 2.3.2. ■

Definición 3.1.8 (Índice de un campo). Dado un campo ξ tangente a M con un número finito de ceros, definimos el *índice de ξ en un cero p* como

$$\text{ind}_p(\xi) = \deg \left(\frac{\bar{\xi}}{\|\bar{\xi}\|} \Big|_{S_x} \right),$$

donde φ es una parametrización con $\varphi(x) = p$, S_x es una esfera pequeña alrededor de x y $\bar{\xi}$ es una localización de ξ . Por la proposición anterior el índice no depende de la parametrización elegida. Además se define el *índice total de ξ* como

$$\text{Ind}(\xi) = \sum_p \text{ind}_p(\xi).$$

Observación 3.1.9 Por la proposición anterior, el índice total de cualquier campo ξ coincide con el índice total de cualquier descomposición suya, luego siempre que lo necesitemos podremos descomponer todos los ceros de ξ y así suponer que son no degenerados.

Ejemplo 3.1.10. Consideremos el caso en el que $M = \mathbb{R}^2$. Identifiquemos como es usual el plano con los números complejos

$$(x, y) \equiv x + iy = z,$$

y definamos el campo ξ tangente a \mathbb{R}^2 :

$$z \mapsto z^d.$$

Es claro que ese campo sólo tiene un cero que se alcanza en $z = 0$ y además

$$\text{Ind}(\xi) = \text{ind}_0(z^d) = \deg \left(\frac{z^d}{\|z^d\|} \Big|_{S^1} \right) = \deg(z^d) = d.$$

Luego vemos que en el plano existen campos tangentes con índices de orden arbitrario. Veremos que en general esto no puede suceder cuando M es compacta. Estudiemos un poco más en detalle el caso en el que $d = 2$. En ese caso

$$z^2 = (x + i \cdot y)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy \equiv (x^2 - y^2, 2xy),$$

luego las curvas integrales del campo $c'(t) = \xi(c(t))$ satisfacen que

$$\frac{dx}{x^2 - y^2} = \frac{dy}{2xy} \quad \text{luego} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right).$$

Mediante el cambio de variables $x = uy$ se obtiene $dx/dy = u + y \cdot du/dy$ y sustituyendo queda

$$\frac{-2udu}{u^2 + 1} = \frac{dy}{y},$$

luego las curvas integrales son

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = \text{cte.}$$

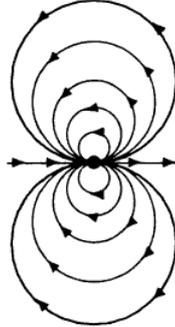


Figura 3.2: En la figura se dibujan las curvas integrales del campo $\xi = z^2$.

Viendo la figura es claro que $\text{Ind}(\xi) = +2$. ■

Observaciones 3.1.11 (1) El cómputo del índice de un campo es en general nada trivial. Sin embargo, cuando el campo es plano existen algoritmos para calcularlo siempre que los dos coeficientes del campo sean polinomios homogéneos. Para más información véase el capítulo tres de [15].

(2) En el caso de campos reales analíticos o complejos, técnicas de Álgebra Conmutativa pueden ser usadas para el cálculo del índice. En particular, es posible expresar el índice de un campo analítico como la signatura de cierta forma cuadrática. Para más, véase el Teorema de Eisenbud-Levine-Khimshiashvili o el artículo [1].

3.2. Campos gradientes.

En esta sección estudiamos un tipo particular pero importante de campos tangentes que tienen varias propiedades adicionales que hacen que el cómputo de su índice sea más sencillo.

Proposición 3.2.1 (Gradiente de una función). Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave definida en una variedad $M \subset \mathbb{R}^q$. Entonces existe un único campo suave ξ tangente a M tal que para todo $p \in M$ y todo $v \in T_p M$ se tiene

$$d_p f(v) = \langle v, \xi_p \rangle,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar en \mathbb{R}^q . Al campo ξ anterior lo llamaremos el gradiente de f y lo denotaremos por $\text{grad}(f)$.

Demostración. La existencia y unicidad de ξ se deduce del Teorema de Representación de Riesz ya que para cada $p \in M$ se tiene que $d_p f \in (T_p M)^*$. Veamos que es un campo suave: sea φ una parametrización de un abierto U alrededor de $p = \varphi(x)$ dado. Entonces

$$\xi|_U = \sum_{j=1}^m \xi_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j},$$

luego

$$\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_i}(x) = d_{\varphi(x)}f \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \xi_{\varphi(x)} \right\rangle = \sum_{j=1}^m g_{ij}(x) \xi_j(x),$$

donde cada g_{ij} es la función suave definida por

$$g_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle.$$

Por tanto obtenemos un sistema lineal con incógnitas $\xi_j(x)$. La matriz $G_x \varphi$ de este sistema es la *matriz de Gram* de la base inducida por φ luego es una matriz definida positiva y por ello tiene determinante > 0 . En consecuencia podemos resolver el sistema y obtener expresiones suaves para las ξ_j . ■

Observaciones 3.2.2 (1) Si M es un abierto de \mathbb{R}^q entonces se tiene que $\text{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_q} \right)$.

(2) Los puntos críticos de f son justamente los ceros de su gradiente.

(3.2.3) Hessiana de una función definida en una variedad. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave definida en una variedad $M \subset \mathbb{R}^q$. En la proposición anterior obtuvimos la igualdad

$$\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^m g_{ik} \xi_k,$$

donde φ es una parametrización de M y $\xi = \text{grad}(f)$. Si tomamos otra derivada, ahora respecto a x_j , queda que

$$\frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x_j \partial x_i} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \xi_k + \sum_{k=1}^m g_{ik} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}.$$

Supongamos ahora que $p = \varphi(x)$ es un punto crítico de f , luego un cero de su gradiente; si particularizamos la anterior igualdad en x queda

$$\frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^m g_{ik}(x) \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}(x)$$

introduciendo la *matriz simétrica*

$$H_x(f \circ \varphi) = \left(\frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x_j \partial x_i}(x) \right)_{i,j},$$

podemos reescribir la suma anterior en forma matricial

$$H_x(f \circ \varphi) = G_x \varphi \cdot J_x \bar{\xi},$$

y como $\det(G_x \varphi) > 0$ obtenemos

$$\text{ind}_p(\xi) = \text{signo det}(J_x \bar{\xi}) = \text{signo det}(H_x(f \circ \varphi)).$$

A los puntos críticos x tales $\det(H_x(f \circ \varphi)) \neq 0$ los llamaremos **puntos críticos no degenerados de f** . Nótese que estos puntos coinciden con los ceros no degenerados de $\xi = \text{grad}(f)$. Para terminar consideremos la forma cuadrática

$$Q_p(f) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por la matriz $H_x(f \circ \varphi)$ respecto a la base $\{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\}_i$. Resulta que $Q_p(f)$ no depende de φ : un cálculo sencillo muestra que

$$Q_p(f)(u) = (f \circ \gamma)''(0);$$

donde $u \in T_p M$ y γ es cualquier curva tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = u$. A la forma cuadrática anterior la llamaremos la **Hessiana de f en p** . ■

Observación 3.2.4 Es importante enfatizar, que para que la Hessiana esté bien definida es fundamental que p sea un punto crítico de f .

Definición 3.2.5 (Índice de un punto crítico). Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y $p \in M$ un punto crítico no degenerado de f , es decir, un cero no degenerado de su gradiente. Definimos el *índice de f en p* , denotado por $\text{ind}_p(f)$, como el índice (número de autovalores negativos) de la forma cuadrática $Q_p(f)$.

Del hecho de que el determinante de una matriz es el producto de sus autovalores se sigue la siguiente proposición.

Proposición 3.2.6. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y pongamos $\xi = \text{grad}(f)$. Si $p \in M$ es un punto crítico no degenerado de f entonces

$$\text{ind}_p(\xi) = (-1)^{\text{ind}_p(f)}.$$

3.3. Funciones de Morse.

Una función suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una **función de Morse** si todos los ceros de $\xi = \text{grad}(f)$ son no degenerados. Entonces todos sus ceros son aislados y en caso de que haya un número finito (por ejemplo si M es compacta) tenemos

$$\text{Ind}(\xi) = \sum_p \text{ind}_p(\xi) = \sum_p (-1)^{\text{ind}_p(f)},$$

luego si denotamos por α_k al número de puntos críticos de f de índice k obtenemos que

$$\text{Ind}(\xi) = \sum_k (-1)^k \alpha_k.$$

Veamos ahora un ejemplo donde se ilustran los conceptos introducidos.

Ejemplo 3.3.1. Sean $M = \mathbb{R}P^m = \mathbb{S}^m/\mathbb{Z}_2$ el espacio proyectivo de dimensión m y $f : \mathbb{R}P^m \rightarrow \mathbb{R}$ la función suave definida por

$$[x_0, \dots, x_m] \mapsto \sum_{l=0}^m c_l x_l^2,$$

donde los c_l son reales todos distintos y por ello, sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$c_0 < c_1 < \dots < c_m.$$

Vamos a demostrar que f es una función de Morse y calcular su índice. Para ello usamos las parametrizaciones inducidas por la esfera (el circunflejo indica que x_k está ausente)

$$\varphi_k : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}P^m : (x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_m) \mapsto [x_0, \dots, \pm \sqrt{1 - \sum_{l \neq k} x_l^2}, \dots, x_m]$$

que cubren todo el espacio proyectivo. Luego calculamos la composición

$$f \circ \varphi_k : (x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_m) \mapsto c_k + \sum_{l \neq k} (c_l - c_k) x_l^2,$$

y por tanto (para $i \neq k$, ya que x_k no está)

$$\frac{\partial(f \circ \varphi_k)}{\partial x_i} = 2(c_i - c_k)x_i.$$

Luego igualando a cero queda que el único punto crítico es

$$p_k = \varphi_k(0) = [0, \dots, 1, \dots, 0],$$

donde el uno está en la posición k -ésima. Por tanto, variando k obtenemos que nuestra función f tiene $m + 1$ puntos críticos, los p_k , y que además

$$\frac{\partial^2(f \circ \varphi_k)}{\partial x_j \partial x_i}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 2(c_i - c_k) & \text{si } i = j, \end{cases}$$

luego todos los ceros p_k son no degenerados y además $\text{ind}_{p_k}(f) = k$; luego $\alpha_k = 1$ para todo k y

$$\text{Ind}(\xi) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \cdot 1 = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ es impar,} \\ 1 & \text{si } m \text{ es par.} \end{cases}$$

(3.3.2) Existencia de funciones de Morse. Antes de seguir y mostrar lo útiles que pueden ser las funciones de Morse es quizá importante plantearse si dada una variedad $M \subset \mathbb{R}^q$ va a existir siquiera una de esas funciones. La respuesta es afirmativa y de hecho se tiene que hay muchas funciones de Morse: el conjunto de todos los $a \in \mathbb{R}^q$ tales que

$$f_a : M \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \langle x, a \rangle$$

es una función de Morse es denso en \mathbb{R}^q . Para una demostración véase [5]. ■

Pasamos ahora a demostrar el teorema inicial de toda la Teoría de Morse.

Teorema 3.3.3 (Lema de Morse). *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse y $p_0 \in M$ un punto crítico de f . Entonces existe una carta $y : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ alrededor de p_0 con $y(p_0) = (y_1(p_0), \dots, y_m(p_0)) = 0$ tal que*

$$f = f(p_0) - y_1^2 - \dots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \dots + y_m^2$$

donde $\lambda = \text{ind}_{p_0}(f)$.

Demostración. Primero que nada, nótese que de existir una carta y como se desea, necesariamente habría de ser que $\lambda = \text{ind}_{p_0}(f)$ ya que el índice es un invariante de la Hessiana de f . Ahora pasemos a construir la carta y requerida. Como siempre con este tipo de cuestiones locales, podemos asumir que $M = \mathbb{R}^m$, $p_0 = 0$ y $f(p_0) = 0$. Ahora bien, tenemos

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_m) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx_1, \dots, tx_m) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_m) x_i dt \\ &= \sum_{i=1}^m x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_m) dt, \end{aligned}$$

luego se tiene que

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m x_i g_i(x_1, \dots, x_m),$$

donde las g_i son funciones suaves tales que $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$ ya que $p_0 = 0$ es punto crítico de f . Por tanto, si le aplicamos el razonamiento anterior a cada g_i por separado obtenemos que

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i,j} x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_m).$$

Si ahora definimos la función suave

$$H_{ij} := \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji}),$$

deducimos que $H_{ij} = H_{ji}$ y que

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i,j} x_i x_j H_{ij}(x_1, \dots, x_m) = x^T H_x x,$$

donde $H_x := (H_{ij}(x))_{i,j}$ es una matriz simétrica. Además, derivando y evaluando en el cero se deduce que $H_{ij}(0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(0)$. Como $\det(H_0) \neq 0$ (debido a que p_0 es un cero no degenerado) podemos suponer, después de realizar una transformación lineal si es necesario, que

$$H_{11}(0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0) \neq 0.$$

Luego por continuidad existe un entorno U_1 del cero donde H_{11} no se anula. Definimos pues, la función suave nunca nula

$$G_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} : G_1(x_1, \dots, x_m) = \sqrt{|H_{11}(x_1, \dots, x_m)|}.$$

Sea ahora

$$y : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$$

la función suave definida como

$$\begin{aligned} x \mapsto y_1(x) &= G_1(x) \cdot \left(x_1 + \sum_{i=2}^m \frac{x_i H_{1i}(x)}{H_{11}(x)} \right), \\ x \mapsto y_j(x) &= x_j \text{ para } j \neq 1. \end{aligned}$$

Un cálculo sencillo muestra que el determinante jacobiano en el cero es

$$\det(J_0 y) = G_1(0) \neq 0,$$

luego por el *Teorema de Inversión Local* existe un entorno $\tilde{U}_1 \subset U_1$ del cero donde y tiene inversa diferenciable. Por tanto $y|_{\tilde{U}_1}$ es una carta alrededor del cero tal que $y(0) = 0$. Veamos que expresión tiene f en esas coordenadas. Con ese fin, calculamos

$$y_1^2 = \pm H_{11} x_1^2 \pm 2 \sum_{i=2}^m x_1 x_i H_{1i} \pm \frac{(\sum_{i=2}^m x_i H_{1i})^2}{H_{11}},$$

donde ponemos un más si $H_{11} > 0$ y un menos si $H_{11} < 0$ en \tilde{U}_1 . Por lo tanto

$$f = \pm y_1^2 + \sum_{i,j \geq 2} x_i x_j H_{ij} - \frac{(\sum_{i=2}^m x_i H_{1i})^2}{H_{11}} = \pm y_1^2 + \sum_{i,j \geq 2} y_i y_j H'_{ij},$$

donde ponemos un más si $H_{11} > 0$ y un menos si $H_{11} < 0$ en \tilde{U}_1 . Así pues, por inducción desde $k = 1$ hasta $k = m$ obtenemos el resultado buscado. ■

Observación 3.3.4 El lema de Morse nos permite dar una interpretación geométrica al índice de una función en un punto crítico: simplemente contabiliza el número de direcciones (independientes) en las que f decrece en un entorno del punto en cuestión. Así, es claro que si p es un mínimo local de f entonces $\text{ind}_p(f) = 0$ y que si es un máximo $\text{ind}_p(f) = m$.

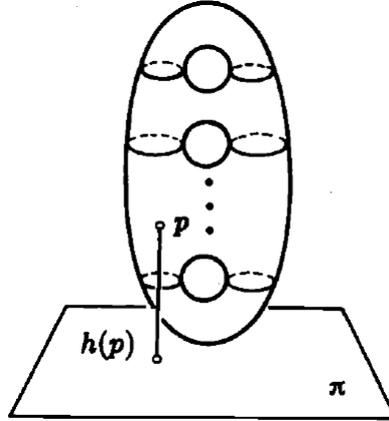


Figura 3.3: M_g es una superficie con g agujeros. Si $g = 0$ es una esfera y si $g = 1$ un toro.

Por ejemplo, la función altura $p = (x, y, z) \mapsto h(p) = z$ definida en la superficie orientable $M_g \subset \mathbb{R}^3$ de género g que se aprecia en la figura de más arriba, es una función de Morse con $2g + 2$ puntos críticos. De ellos, uno es un máximo de índice 2 y otro es un mínimo de índice 0. Los restantes $2g$ puntos, son puntos de silla (sólo se decrece en una dirección) de índice 1. Luego,

$$\text{Ind}(\xi) = \sum_k (-1)^k \alpha_k = \alpha_0 + (-1)\alpha_1 + \alpha_2 = 1 + (-1)2g + 1 = 2 - 2g,$$

donde como siempre $\xi = \text{grad}(h)$.

3.4. Teorema de Reeb.

En esta sección daremos una pequeña muestra de cómo las funciones de Morse nos pueden ayudar a estudiar la topología de una variedad. Para un tratamiento más completo de la Teoría de Morse ver [11].

Proposición 3.4.1. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y supongamos que $f^{-1}[a, b] \subset M$ es un compacto que no contiene puntos críticos de M . Entonces la ∂ -variedad M^a es difeomorfa a la ∂ -variedad M^b donde $M^x := \{p \in M : f(p) \leq x\}$.

Demostración. Denotemos como siempre $\xi = \text{grad}(f)$, por hipótesis

$$\|\xi(p)\|^2 \neq 0 \text{ para } p \in f^{-1}[a, b].$$

Sea ahora $\theta : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función meseta ≥ 0 tal que $\theta \equiv 1$ en $f^{-1}[a, b]$ y $\theta \equiv 0$ fuera de un entorno V de $f^{-1}[a, b]$ tal que \bar{V} sea compacto. Definamos ahora el campo X tangente a M como:

$$X(p) = \frac{\theta(p)}{\|\xi(p)\|^2} \cdot \xi(p).$$

Es claro que X es suave y que tiene soporte compacto, luego genera un flujo completo $\varphi_t : M \rightarrow M$. Para cada $p \in M$ fijo definimos la función suave

$$t \mapsto f(\varphi_t(p)),$$

que cumple que

$$\frac{d}{dt}f(\varphi_t(p)) = d_{\varphi_t(p)}f\left(\frac{d}{dt}\varphi_t(p)\right) = \langle \xi(\varphi_t(p)), \frac{d}{dt}\varphi_t(p) \rangle = \langle \xi, X \rangle|_{\varphi_t(p)} = \theta(\varphi_t(p)),$$

luego $f(\varphi_t(p))$ es una función creciente y $\frac{d}{dt}f(\varphi_t(p)) = 1$ siempre que $\varphi_t(p) \in f^{-1}[a, b]$. Por tanto

$$f(\varphi_t(p)) = t + f(p) \quad \text{cuando} \quad f(\varphi_t(p)) \in [a, b]. \quad (3.3)$$

Visto lo anterior, se tiene que $\varphi_{a-b} : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo que transforma M^b en M^a . En efecto, es suficiente ver que:

- (i) φ_{a-b} manda M^a a M^a .
- (ii) φ_{a-b} manda $M^b \setminus M^a = f^{-1}[a, b]$ a M^a .
- (iii) $\varphi_{a-b}^{-1} = \varphi_{b-a}$ manda M^a a M^b .

Nótese que (i) y (ii) prueban que $\varphi_{a-b}(M^b) \subset M^a$, mientras que (iii) prueba la inclusión contraria. Empecemos viendo (i); sea y tal que $f(y) \leq a$, entonces existe un x tal que $y = \varphi_{b-a}(x)$. Luego por ser $f(\varphi_t(x))$ creciente queda

$$f(x) = f(\varphi_0(x)) \leq f(\varphi_{b-a}(x)) = f(y) \leq a,$$

luego $f(\varphi_{a-b}(y)) \leq a$. Veamos ahora (ii). Sea y tal que $a \leq f(y) \leq b$ y x tal que $y = \varphi_{b-a}(x)$. Entonces

$$a \leq f(\varphi_{b-a}(x)) \leq b,$$

luego usando (3.3) queda

$$b - a + f(x) \leq b$$

y por tanto $f(\varphi_{a-b}(y)) \leq a$ como queríamos. Finalmente mostremos (iii); sea y tal que $f(y) \leq a$. Queremos ver que $f(\varphi_{b-a}(y)) \leq b$. Supongamos para llegar a una contradicción que

$$f(\varphi_{b-a}(y)) > b.$$

Por continuidad y por ser nuestra función creciente, existiría $t' < b - a$ tal que $f(\varphi_{t'}(y)) = b$, pero usando nuevamente (3.3) tendríamos que

$$b = t' + f(y) \leq t' + a,$$

luego quedaría que $t' \geq b - a$ lo cual es claramente imposible. ■

Definamos ahora la función altura en la esfera:

$$\mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_{m+1}) \mapsto x_{m+1}$$

es fácil ver que es una función de Morse y que sólo posee un máximo y un mínimo y ningún otro punto crítico. Veamos que de hecho esto caracteriza topológicamente a la esfera m -dimensional:

Teorema 3.4.2 (de Reeb). Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y M una variedad compacta de dimensión m . Si f sólo tiene dos puntos críticos no degenerados entonces M es homeomorfa a la esfera m -dimensional \mathbb{S}^m .

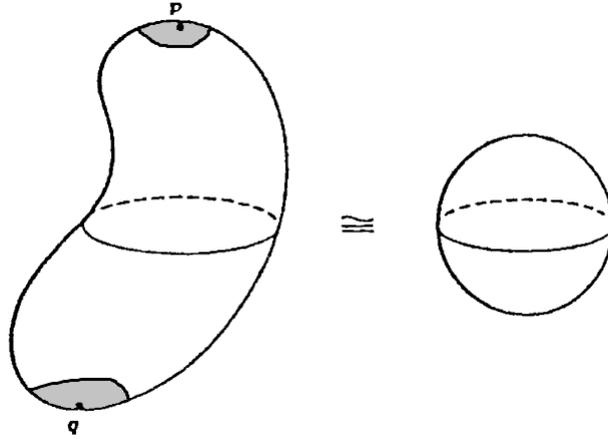


Figura 3.4: M es homeomorfa a \mathbb{S}^m .

Demostración. Al ser M compacta uno de los puntos críticos q debe ser un mínimo $f(q) = 0$ y el otro p debe ser un máximo $f(p) = 1$. Por el lema de Morse, para ϵ suficientemente pequeño tanto $M^\epsilon = f^{-1}[0, \epsilon]$ como $f^{-1}[1 - \epsilon, 1]$ son discos cerrados de dimensión m . Por la proposición anterior M^ϵ es difeomorfa a $M^{1-\epsilon} = f^{-1}[0, 1 - \epsilon]$. Luego M es la unión de dos discos cerrados pegados a lo largo de su borde común y por ello es homeomorfa a \mathbb{S}^m . ■

Observación 3.4.3 En general la M del enunciado no tiene porqué ser difeomorfa a la esfera. De hecho, Milnor ([11]) demostró que existen variedades suaves de dimensión 7 homeomorfas a \mathbb{S}^7 pero no difeomorfas a ella. Para ello construyó una variedad compacta que admitía una función suave con sólo dos puntos críticos no degenerados y luego demostró mediante otros métodos que la estructura diferenciable de dicha variedad era distinta a la estándar de la esfera 7-dimensional.

Capítulo 4

Teorema de Poincaré-Hopf.

En este último capítulo se demuestra el teorema más importante de todo el trabajo: el *Teorema del Índice de Poincaré-Hopf*. En la sección uno se da una demostración completa del teorema; posteriormente se define la *característica de Euler-Poincaré* y se calcula para algunas variedades sencillas. En la sección dos se estudia el caso de *variedades con característica cero*. Allí utilizamos resultados importantes obtenidos en el capítulo dos. Para finalizar el trabajo se demuestra la bonita *fórmula de Gauss-Bonnet*.

4.1. Teorema del Índice.

Después de todos los preparativos hechos en los capítulos anteriores pasamos a demostrar el célebre Teorema de Poincaré-Hopf. Es un resultado sorprendente en cuanto a que establece que el índice de un campo con ceros aislados no depende del campo en sí, sino de la variedad donde esté definido. No sólo eso, sino que como veremos más adelante relaciona una cantidad *analítica* como es el índice de un campo tangente con otra *topológica* como es la característica de Euler de la variedad. Para la demostración del teorema usaremos las notaciones y los resultados obtenidos en (1.3) sobre entornos tubulares.

Recuérdese que teníamos fijada una variedad compacta $M \subset \mathbb{R}^q$ y que definíamos un *tubo* alrededor de M que era simplemente la ∂ -variedad compacta

$$N = \{x \in \mathbb{R}^q : \text{dist}(x, M) \leq \sqrt{\epsilon}\}$$

para un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, con borde

$$\partial N = \{x \in \mathbb{R}^q : \text{dist}(x, M) = \sqrt{\epsilon}\},$$

y en la hipersuperficie ∂N definíamos el campo normal

$$\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}(x - \rho(x)) \text{ para } x \in \partial N,$$

donde $\rho : N \subset U \rightarrow M$ era una retracción suave definida en un entorno abierto U de M como $U \ni y = x + v \mapsto x$ donde $x \in M$ y $v \in T_x M^\perp$. La retracción tiene las siguientes propiedades:

- (1) $\rho(x) = x$ si y sólo si $x \in M$.
- (2) $x - \rho(x) \perp T_{\rho(x)} M$ para todo $x \in U$.

(3) $\text{dist}(y, M) = \|y - \rho(y)\|$ para todo $y \in U$.

Recordadas esas nociones podemos demostrar el teorema principal de este trabajo.

Teorema 4.1.1 (del Índice). *Sea ξ un campo tangente a una variedad compacta $M \subset \mathbb{R}^q$ tal que todos sus ceros sean aislados. Sea $\eta : \partial N \rightarrow \mathbb{S}^{q-1}$ un campo normal en un tubo alrededor de M . Entonces*

$$\text{Ind}(\xi) = \text{deg}(\eta).$$

Demostración. Después de descomponer todos los ceros de ξ como en (3.1) podemos asumir que estos son no degenerados. Sea ahora la función suave

$$f : N \rightarrow \mathbb{R}^q : \quad x \mapsto x - \rho(x) + \xi(\rho(x)).$$

Ahora bien, si $f(a) = 0$ entonces al ser $x - \rho(x)$ y $\xi(\rho(x))$ perpendiculares deducimos que $a = \rho(a)$ y $\xi(a) = 0$. Luego $a \in M$ es un cero de ξ . Por lo tanto

$$(i) \quad f \equiv \xi \text{ en } M \text{ luego } d_a f|_{T_a M} = d_a \xi.$$

$$(ii) \quad f \equiv x - a \text{ en } (a + T_a M^\perp) \cap N \text{ luego } d_a f|_{T_a M^\perp} = \text{Id}_{T_a M^\perp}.$$

De (i) y (ii) se desprende que $d_a f = d_a \xi \oplus \text{Id}_{T_a M^\perp}$ y por tanto $\det(d_a f) = \det(d_a \xi) \neq 0$, luego $0 \in R_f$ es un valor regular de f . Si ahora usamos la Proposición 2.3.2 sobre el número de vueltas queda:

$$w(f, 0) = \text{deg} \left(\frac{f}{\|f\|} \Big|_{\partial N} \right) = \sum_{a \in f^{-1}(0)} \text{signo}_a(f) = \sum_{a \in \bar{\xi}^{-1}(0)} \text{signo}_a(\bar{\xi}) = \text{Ind}(\xi).$$

Sólo nos queda por ver que $w(f, 0) = \text{deg}(\eta)$, pero eso es cierto ya que las funciones $\frac{f}{\|f\|} \Big|_{\partial N}$ y η son homótopas al no tener antípodas (ver Ejemplo 1.1.2): si para $x \in \partial N$ se tuviera que

$$-\eta(x) = \frac{f}{\|f\|}(x),$$

entonces tendríamos que para $\lambda(x) = \sqrt{\epsilon} \cdot \|f(x)\| \geq 0$ se cumpliría

$$-\lambda(x)(x - \rho(x)) = x - \rho(x) + \xi(\rho(x))$$

y por tanto

$$\xi(\rho(x)) = -(1 + \lambda(x))(x - \rho(x)),$$

lo cual es claramente imposible para $x \notin M$. ■

Definición 4.1.2 (Característica de Euler-Poincaré). Dada una variedad compacta M se define su *característica de Euler-Poincaré* como el entero

$$\chi(M) = \text{Ind}(\xi),$$

donde ξ es cualquier campo tangente a M con todos sus ceros aislados.

Observaciones 4.1.3 (1) En el capítulo anterior vimos que hay *muchas* funciones de Morse para cualquier variedad dada, luego la definición no es vacua.

(2) De la definición del índice de un campo se deduce que la característica de Euler-Poincaré de M es un invariante diferencial de la variedad, es decir, si M y M' son difeomorfas entonces $\chi(M) = \chi(M')$.

(3) Puede demostrarse que la característica de Euler-Poincaré arriba definida coincide con la definición usual en función de los grupos de homología de la variedad (ver [8]). Por tanto, no sólo obtenemos que es un invariante diferencial de la variedad sino que también es un invariante topológico. Veamos una *demostración geométrica* de este hecho triangulando M^4 . Para fijar ideas supongamos que M es una superficie. Al ser M compacta, podemos suponer que la triangulación es finita. La definición clásica de característica de Euler es

$$\chi'(M) = V - A + F,$$

donde V es el número de vértices de la triangulación, A el número de aristas y F el número de caras.

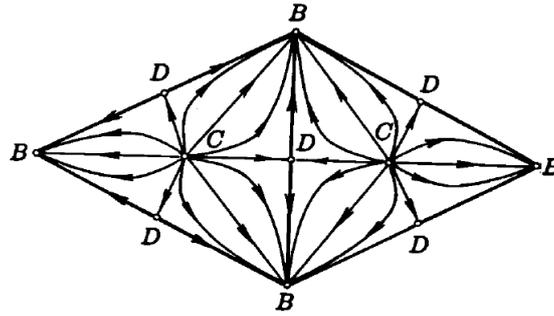


Figura 4.1: *Curvas integrales de ξ . Cada punto B es uno de los vértices de nuestra triangulación, cada punto C está dentro de una cara y cada punto D está contenido en una arista.*

La idea ahora es construir un campo tangente ξ que tenga índice total igual a $\chi'(M)$. Para ello consideramos el campo tangente que tiene como curvas integrales las indicadas en la figura de más arriba (sólo se muestran dos de los triángulos de la triangulación). De esa manera cada punto B es un atractor de índice $+1$, cada C un repulsor de índice $+1$ y cada D un punto de silla de índice -1 . Así pues, cuando hacemos la suma de todos los índices queda

$$\chi(M) = \text{Ind}(\xi) = \sum_B (+1) + \sum_D (-1) + \sum_C (+1) = V - A + F = \chi'(M).$$

■

En el capítulo anterior obtuvimos que si M es una variedad compacta de dimensión m y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse entonces para $\xi := \text{grad}(f)$

$$\text{Ind}(\xi) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \alpha_k,$$

donde α_k es el número de puntos críticos de f de índice k , luego

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \alpha_k$$

La anterior es una igualdad bastante importante, en cuanto que relaciona la topología de una variedad con los puntos críticos de cualquier función de Morse definida sobre ella. Cabe destacar, que es parte de las famosas **desigualdades de Morse** (de hecho es la única igualdad) que se enuncian de nuevo en término de los grupos de homología de M . Veamos ahora algunos ejemplos.

⁴Es posible demostrar que cualquier variedad suave puede ser triangulada.

Ejemplos 4.1.4 (1) $\chi(\mathbb{S}^m) = 1 + (-1)^m$. En efecto, la función altura del capítulo anterior es una función de Morse que solo tiene como puntos críticos al polo norte (máximo de índice m) y al polo sur (mínimo de índice 0).

(2) Del Ejemplo 3.3.1 y de la definición se deduce que

$$\chi(\mathbb{R}P^m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ es impar,} \\ 1 & \text{si } m \text{ es par.} \end{cases}$$

(3) $\chi(\mathbb{T}^m) = 0$ donde $\mathbb{T}^m = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ es el toro m -dimensional. En efecto, esto es debido a que en toro existen campos tangentes nunca nulos.

(4) $\chi(M_g) = 2 - 2g$ donde M_g es la superficie orientable de género g . En efecto, en (3.3.4) vimos que el gradiente de la función altura tenía índice total $2 - 2g$. ■

4.2. Existencia de campos tangentes nunca nulos.

Sea M una variedad compacta de dimensión m y ξ un campo tangente a M con todos sus ceros aislados. De nuevo, podemos suponer (después de una descomposición) que todos sus ceros son no degenerados. Ahora bien, $-\xi$ también es un campo tangente a M y es muy fácil ver que

$$\text{Ind}(-\xi) = (-1)^m \text{Ind}(\xi).$$

Pero por el Teorema del Índice, $\text{Ind}(-\xi) = \text{Ind}(\xi)$, luego se ha de cumplir que

$$\text{Ind}(\xi) = (-1)^m \text{Ind}(\xi),$$

pero si m es impar, esto implica que

$$\chi(M) = 0.$$

Nótese que esto concuerda con los ejemplos de la sección anterior. El siguiente teorema nos dice que de la nulidad de la característica de Euler-Poincaré se puede deducir mucho más.

Teorema 4.2.1. *Sea M una variedad compacta tal que $\chi(M) = 0$. Entonces existe un campo X tangente a M nunca nulo.*

Demostración. Sea ξ un campo tangente a M tal que $\text{Ind}(\xi) = 0$. De nuevo, podemos suponer que todos sus ceros son no degenerados. Por el corolario del lema de difeotopía podemos encontrar un abierto $U \subset M$ difeomorfo a \mathbb{R}^m que contenga a todos los ceros $\{p_1, \dots, p_n\}$ de ξ . Sea $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un difeomorfismo y consideremos el campo

$$\zeta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

definido por $\zeta_{\varphi(p)} = d_p\varphi(\xi_p)$. Por definición, los ceros de ζ son no degenerados y son justamente $\{\varphi(p_1), \dots, \varphi(p_n)\}$. Sea ahora $B \subset \mathbb{R}^m$ una bola cerrada suficientemente grande para que los contenga a todos. Sabemos que $\text{Ind}(\zeta) = \text{Ind}(\xi) = 0$, luego por el Corolario 2.4.3 podemos encontrar un campo nunca nulo

$$\eta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

tal que $\eta \equiv \zeta$ fuera de B . Definimos pues el campo tangente a M :

$$X_p = \begin{cases} \xi_p & \text{si } p \notin \varphi^{-1}(B), \\ d_x\varphi^{-1}(\eta_x) & \text{si } p = \varphi^{-1}(x) \in U. \end{cases}$$

Nótese que en el abierto $U \setminus \varphi^{-1}(B)$ tenemos que

$$d_x \varphi^{-1}(\eta_x) = d_x \varphi^{-1}(\zeta_{\varphi(p)}) = d_x \varphi^{-1}(d_p \varphi(\xi_p)) = \xi_p,$$

luego ambas definiciones coinciden por lo que X es un campo suave. Además claramente X es nunca nulo, luego hemos acabado. ■

Para finalizar esta sección damos una aplicación interesante del teorema anterior, cf. [7].

Proposición 4.2.2. *Sea M es una variedad compacta tal que $\chi(M) = 0$, entonces existe una función suave $f : M \rightarrow M$ sin ningún punto fijo que es homótopa a la identidad.*

Demostración. Sea X un campo tangente a M nunca nulo y ρ una retracción suave como en la sección (1.3). Por ser M compacta, la función continua

$$M \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \|X(x)\|$$

alcanza su máximo, luego dado el $\epsilon > 0$ del teorema del entorno tubular, existe un $c > 0$ tal que $\|cX(x)\| < \epsilon$. Por ello, la función suave

$$F : [0, 1] \times M \rightarrow M : F(t, x) = \rho(x + tcX(x))$$

está bien definida y define una homotopía entre la identidad F_0 y una función $f := F_1$ sin ningún punto fijo, ya que en caso contrario

$$x = \rho(x + cX(x))$$

implicaría que $cX(x)$ es a la vez un vector normal y tangente a M , lo cual es imposible ya que X nunca es nulo. ■

4.3. Fórmula de Gauss-Bonnet.

En esta sección demostraremos la célebre fórmula de Gauss-Bonnet que relaciona de forma bastante sorprendente la topología de una variedad con su *curvatura íntegra*. Para ello necesitamos antes algunos preparativos. El primero de ellos será una generalización del *Teorema de Cambio de Variables* que ya fue intuido en el Ejemplo 2.1.9. Para la demostración usamos ideas del libro [2].

Proposición 4.3.1. *Sean M y N dos variedad compactas y orientadas de la misma dimensión m y sea $f : M \rightarrow N$ una función suave entre ellas. Entonces para cualquier m -forma diferenciable ω de N se cumple que*

$$\int_M f^* \omega = \deg(f) \cdot \int_N \omega,$$

donde f^* denota la aplicación retrogradiente

$$f^* \omega_x(v_1, \dots, v_m) := \omega_{f(x)}(d_x f(v_1), \dots, d_x f(v_m)).$$

Demostración. Igual que en la demostración de la invarianza local del grado (Proposición 2.1.1) para cada $y \in R_f$ escribamos $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_r\}$. Entonces por el mismo argumento que allí se dió, existen $U_k \ni x_k$ abiertos disjuntos tales que $f|_{U_k}$ es un difeomorfismo sobre un entorno V de y tal que $f^{-1}(V) = \cup_k U_k$. Al ser $f|_{U_k}$ un difeomorfismo el *Teorema del Cambio de Variables* nos dice que

$$\int_{U_k} f^* \omega = \text{signo det}(d_{x_k} f) \cdot \int_V \omega = d(f, x_k) \cdot \int_V \omega,$$

luego sumando

$$\sum_{k=1}^r \int_{U_k} f^* \omega = \sum_{k=1}^r d(f, x_k) \cdot \int_V \omega$$

y como los U_k son disjuntos

$$\int_{f^{-1}(V)} f^* \omega = \deg(f) \cdot \int_V \omega. \quad (4.1)$$

Nótese que la igualdad anterior se cumple también para cualquier subconjunto $E \subset V$ (medible) donde la integral tenga sentido. Ahora bien, el abierto $R_f = N \setminus f(C_f)$ es una subvariedad de N , luego del recubrimiento por abiertos $\{V_y\}_{y \in R_f}$ podemos extraer un subrecubrimiento numerable $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Queremos obtener un recubrimiento por conjuntos disjuntos dos a dos, para ello, realizamos lo siguiente:

$$W_1 := V_1, \quad W_2 = V_2 \setminus W_1, \quad \dots \quad W_n = V_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} W_j, \quad \dots$$

Luego obtenemos una familia de conjuntos disjuntos dos a dos $\{W_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tales que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} W_j = R_f \quad \text{y} \quad W_n \subset V_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Ahora bien, el Teorema de Sard nos dice que $f(C_f) \subset N$ tiene medida cero, luego

$$\int_N \omega = \int_{N \setminus f(C_f)} \omega = \int_{R_f} \omega = \int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} W_j} \omega = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{W_j} \omega.$$

Asimismo, en los puntos críticos $x \in C_f$ de f se tiene que $d_x f$ no es suprayectiva luego si v_1, \dots, v_m son linealmente independientes, se tiene que

$$f^* \omega_x(v_1, \dots, v_m) = \omega_{f(x)}(d_x f(v_1), \dots, d_x f(v_m)) = 0$$

y por tanto

$$\int_M f^* \omega = \int_{M \setminus C_f} f^* \omega.$$

Finalmente, como

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(W_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} W_j\right) = f^{-1}(R_f) = M \setminus C_f$$

juntando todo lo que tenemos llegamos a

$$\int_{M \setminus C_f} f^* \omega = \int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(W_j)} f^* \omega = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{f^{-1}(W_j)} f^* \omega = \sum_{j=1}^{\infty} \deg(f) \cdot \int_{W_j} \omega,$$

de donde se desprende la igualdad buscada. ■

(4.3.2) Curvatura de Gauss. Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ una hipersuperficie compacta y orientada y $\nu : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ un campo de vectores unitarios normal a M compatible con su orientación. Entonces

$$T_{\nu(x)} \mathbb{S}^m \equiv \text{hiperplano perpendicular a } \nu(x) \equiv T_x M,$$

luego podemos considerar el endomorfismo

$$d_x \nu : T_x M \rightarrow T_{\nu(x)} \mathbb{S}^m \equiv T_x M,$$

y por tanto definimos **la curvatura de Gauss** en $x \in M$ como

$$K(x) = \det(d_x \nu).$$

Geoméricamente $K(x)$ mide la forma en la que se *curva* M alrededor de x . Recuérdesse ahora que la forma de volumen canónica de cualquier hipersuperficie M con un campo normal ν es

$$(\Omega_M)_x(v_1, \dots, v_m) = \det(\nu(x), v_1, \dots, v_m)$$

para $v_1, \dots, v_m \in T_x M$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} (\nu^* \Omega_{\mathbb{S}^m})_x(v_1, \dots, v_m) &= (\Omega_{\mathbb{S}^m})_{\nu(x)}(d_x \nu(v_1), \dots, d_x \nu(v_m)) \\ &= \det(\nu(x), d_x \nu(v_1), \dots, d_x \nu(v_m)) = (\Omega_M)_x(d_x \nu(v_1), \dots, d_x \nu(v_m)) \\ &= \det(d_x \nu) \cdot (\Omega_M)_x(v_1, \dots, v_m) = K(x) \cdot (\Omega_M)_x(v_1, \dots, v_m), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\nu^* \Omega_{\mathbb{S}^m} = K \Omega_M.$$

Finalmente si aplicamos la proposición anterior llegamos a que

$$\mathcal{K} := \int_M K \Omega_M = \int_M \nu^* \Omega_{\mathbb{S}^m} = \deg(\nu) \cdot \int_{\mathbb{S}^m} \Omega_{\mathbb{S}^m} = \deg(\nu) \cdot \text{vol}_m(\mathbb{S}^m).$$

La \mathcal{K} arriba definida se denomina la **curvatura íntegra** de M . Veremos cuando m es par, es un invariante topológico de M . Para ello, solo nos falta calcular $\deg(\nu)$ y ya tendremos la fórmula que buscamos. La siguiente proposición nos da la respuesta.

Proposición 4.3.3. *Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ una hipersuperficie compacta y orientada y $\nu : M \rightarrow \mathbb{S}^m$ un campo de vectores unitarios normal a M compatible con su orientación. Entonces*

$$\chi(M) = 2 \deg(\nu)$$

siempre que m sea un entero par.

Demostración. Sea N el tubo alrededor de M descrito al inicio de este capítulo. Recuérdesse que N es una ∂ -variedad compacta con borde

$$\partial N = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \text{dist}(x, M) = \sqrt{\epsilon}\}$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, y que tenemos definido un campo de vectores unitarios η normal a ∂N dado por

$$\eta : \partial N \rightarrow \mathbb{S}^m : \quad \eta(x) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}(x - \rho(x)) \text{ para } x \in \partial N,$$

donde $\rho : N \subset U \rightarrow M$ es la retracción suave definida en un entorno abierto U de M como $U \ni y = x + v \mapsto x$ donde $x \in M$ y $v \in T_x M^\perp$. Ahora bien, al ser M una hipersuperficie, tenemos que ∂N consiste en dos copias disjuntas M_+ y M_- de M . En efecto, para cada $x \in M$ hay exactamente dos puntos a distancia $\sqrt{\epsilon}$ de x :

$$\begin{cases} x_+ &= x + \sqrt{\epsilon} \nu(x), & \text{luego } \eta(x_+) = \nu(x), \\ x_- &= x - \sqrt{\epsilon} \nu(x), & \text{luego } \eta(x_-) = -\nu(x), \end{cases} \quad (4.2)$$

luego $x = \rho(x_+) = \rho(x_-)$. Hacemos notar que $\eta(x_\pm) = \pm \nu(x)$ se deduce por definición. Por ejemplo,

$$\eta(x_+) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}(x_+ - \rho(x_+)) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}(\sqrt{\epsilon} \nu(x)) = \nu(x).$$

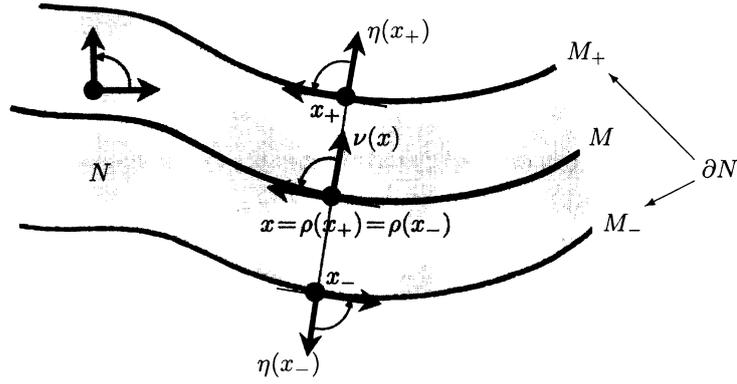


Figura 4.1: ∂N consiste en dos copias disjuntas M_+ y M_- de M .

Asimismo, las expresiones en (4.2) nos garantizan que ρ induce dos difeomorfismos $M_+, M_- \rightarrow M$ con inversas allí descritas. Las derivadas de esas inversas son

$$\text{Id} + \sqrt{\epsilon} d_x \nu \quad \text{e} \quad \text{Id} - \sqrt{\epsilon} d_x \nu.$$

Veamos que ρ preserva la orientación en M_+ y la invierte en M_- . En efecto, mostremos primero que el difeomorfismo $f_- := (\rho|_{M_-})^{-1}$ invierte la orientación. Sea v_1, \dots, v_m una base positiva de $T_x M$, por ser ν compatible con la orientación de M se cumple que

$$\det(\nu(x), v_1, \dots, v_m) > 0,$$

queremos ver que f_- invierte la orientación, es decir

$$\det(\eta(x_-), d_x f_-(v_1), \dots, d_x f_-(v_m)) < 0;$$

pero ese determinante es igual a

$$\det(-\nu(x), v_1 - \sqrt{\epsilon} \cdot d_x \nu(v_1), \dots, v_m - \sqrt{\epsilon} \cdot d_x \nu(v_m)) = -\det(\nu(x), v_1, \dots, v_m) + O(\sqrt{\epsilon}).$$

Luego si elegimos $\epsilon_- > 0$ suficientemente pequeño podemos conseguir que el determinante sea negativo y por lo tanto que ρ invierta la orientación en M_- . Análogamente se comprueba que para $\epsilon_+ > 0$ suficientemente pequeño $f_+ := (\rho|_{M_+})^{-1}$ preserva la orientación. Luego tomamos $\epsilon = \min\{\epsilon_-, \epsilon_+\}$. Finalmente, escribamos

$$\begin{cases} \eta|_{M_+} &= \nu \circ \rho|_{M_+}, \\ \eta|_{M_-} &= \sigma \circ \nu \circ \rho|_{M_-}, \end{cases}$$

donde

$$\sigma : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m : x \mapsto -x$$

es la aplicación antipodal que tiene grado $\deg(\sigma) = (-1)^{m+1}$. Por último, usando que el grado de la composición de funciones es el producto de los grados y que m es par queda

$$\begin{aligned} \deg(\eta) &= \deg(\eta|_{M_+}) + \deg(\eta|_{M_-}) \\ &= \deg(\nu \circ \rho|_{M_+}) + \deg(\sigma \circ \nu \circ \rho|_{M_-}) \\ &= \deg(\nu)(+1) + (-1)^{m+1} \deg(\nu)(-1) = 2 \deg(\nu). \end{aligned}$$

Para acabar nótese que por el Teorema del Índice tenemos que $\chi(M) = \deg(\eta)$, luego se sigue el resultado. ■

Finalmente, después de todo el trabajo realizado, llegamos a la famosa fórmula de Gauss-Bonnet para hipersuperficies compactas y orientadas $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ de dimensión par:

$$\int_M K \Omega_M = \frac{1}{2} \text{vol}_m(\mathbb{S}^m) \chi(M)$$

Esta es una fórmula notable en cuanto que relaciona dos cantidades en principio dispares, como son la curvatura íntegra y la característica de Euler-Poincaré. Geométricamente la fórmula nos dice que si dos hipersuperficies de dimensión par son difeomorfas entonces sus curvaturas íntegras coinciden.

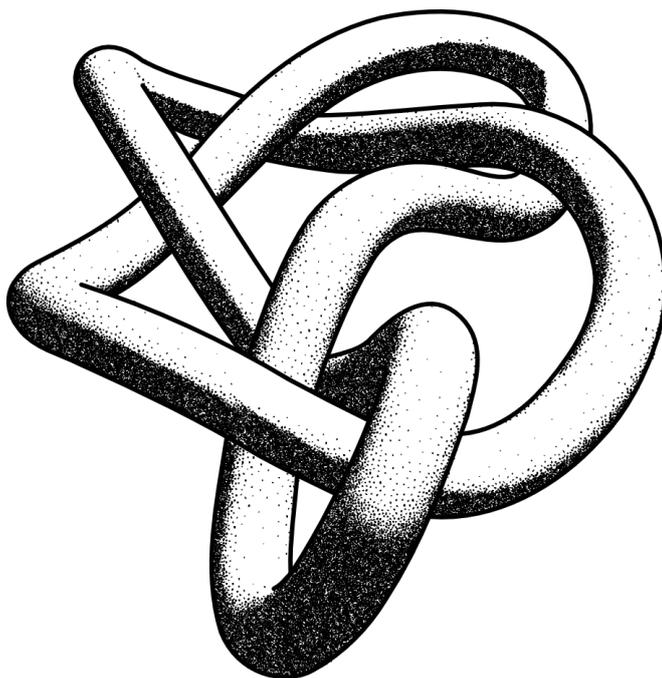


Figura 4.2: *La curvatura de Gauss del toro anudado es muy diferente a la del toro de revolución, pero al integrarlas las diferencias se compensan y dan lugar al mismo resultado.*

Por ejemplo, la superficie T que se muestra en la figura es un toro anudado, luego por ser difeomorfa al toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ se tiene que $\chi(T) = 0$. Por tanto la fórmula nos da que

$$\int_T K \Omega_T = 0,$$

un resultado destacable por sí mismo, que sería casi imposible de obtener por otros métodos.

(4.3.4) Comentarios finales. La fórmula anterior no se cumple para hipersuperficies de dimensión impar, basta tomar $M = \mathbb{S}^3$. También es interesante comentar que existen generalizaciones del teorema que no requieren que la variedad sea una hipersuperficie de \mathbb{R}^{m+1} ni que sea orientable, aunque sí que tenga dimensión par. La más notable de ellas se conoce con el nombre de *Teorema de Chern-Gauss-Bonnet* (ver el artículo original [13] para una demostración general y el libro [12] para una demostración más elemental para el caso $\dim(M) = 2$).

Bibliografía

- [1] CLAUDIA R. ALCÁNTARA Y MANUEL CRUZ-LÓPEZ *Algunos aspectos de la teoría de campos vectoriales planos reales y complejos*.
Volum 2014, treball no. 6, 29 pp. ISSN: 1887-1097. Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.
- [2] B. A. DUBROVIN, A. T. FOMENKO, S. P. NOVIKOV: *Modern Geometry—Methods and Applications. Part II. The Geometry and Topology of Manifolds*.
Springer, Nueva York 1985.
- [3] E. OUTERELO, J.M^A SÁNCHEZ ABRIL: *Elementos de Topología*.
Sanz y Torres, Madrid 2008.
- [4] E. OUTERELO, J.A. ROJO, J.M. RUIZ: *Topología Diferencial*.
Sanz y Torres, Madrid 2014.
- [5] E. OUTERELO, J.M. RUIZ: *Mapping Degree Theory*.
AMS, Providence 2009.
- [6] GLEN E. BREDON: *Topology and Geometry*.
Springer, Nueva York 1993.
- [7] I. FARMAKIS, M. MOSKOWITZ: *Fixed Point Theorems and Their Applications*.
World Scientific, Singapur 2013.
- [8] I. MADSEN, J. TORNEHAVE: *From Calculus to Cohomology*.
Cambridge University Press, Cambridge 1999.
- [9] J.M. GAMBOA, J.M. RUIZ: *Iniciación al estudio de las Variedades Diferenciables*.
Sanz y Torres, Madrid 2016.
- [10] J. MILNOR: *Topology from the differentiable viewpoint*.
Princeton University Press, Princeton 1997.
- [11] J. MILNOR: *Morse Theory*.
Princeton University Press, Princeton 1963.
- [12] MANFREDO P. DO CARMO: *Differential Forms and Applications*.
Springer-Universitext, Berlín 1994.

- [13] SHIING-SHEN CHERN : *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds.*
Annals of Mathematics, Vol. 45, No. 4, October, 1944.
- [14] V. GUILLEMIN, A. POLLACK: *Differential Topology.*
Prentice-Hall, Nueva Jersey 1974.
- [15] ZHANG ZHI-FEN, ET AL.: *Qualitative Theory of Differential Equations.*
American Mathematical Society, Providence 1992.